Pembelajaran 1. Bilangan

A. Kompetensi

Penjabaran model kompetensi yang selanjutnya dikembangkan pada kompetensi guru bidang studi yang lebih spesifik pada pembelajaran 1. Bilangan. Ada beberapa kompetensi guru bidang studi yang akan dicapai pada pembelajaran ini, kompetensi yang akan dicapai pada pembelajaran ini adalah guru P3K mampu:

1. Menjelaskan berbagai sistem bilangan
2. Menerapkan konsep keterbagian, FPB, dan KPK untuk memecahkan masalah
3. Menggunakan pola bilangan dalam pemecahan masalah
4. Menggunakan konsep barisan dan deret untuk memecahkan masalah
5. Menerapkan konsep dan sifat bentuk akar untuk menyelesaikan masalah
6. Menerapkan konsep dan sifat logaritma untuk menyelesaikan masalah

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Dalam rangka mencapai komptensi guru bidang studi, maka dikembangkanlah indikator-indikator yang sesuai dengan tuntutan kompetensi guru bidang studi.

Indikator pencapaian komptensi yang akan dicapai dalam pembelajaran 1. Bilangan adalah sebagai berikut.

1. Menerapkan operasi pada bilangan dengan kriteria tertentu
2. Menggunakan berbagai sistem bilangan dalam memecahkan masalah matematika
3. Mendeskripsikan pengertian keterbagian, FBP, dan KPK
4. Menggunakan konsep keterbagian, FPB, dan KPK untuk memecahkan masalah
5. Menemukan pola bilangan
6. Menentukan susunan bilangan berikutnya berdasarkan pola yang tersedia
7. Menentukan rumus suku ke-n barisan aritmatika
8. Menetukan rumus suku ke-n barisan geometri

9. Menggunakan rumus jumlah n suku pertama deret aritmatika
10. Menggunakan rumus jumlah n suku pertama barisan geometri
11. Mendskripsikan konsep dan sifat bentuk akar
12. Menggukan konsep dan sifat bentuk akar untuk memecahkan masalah
13. Mendskripsikan konsep dan sifat logaritma
14. Menggukan konsep dan sifat logaritma untuk memecahkan masalah

C. Uraian Materi

1. Sistem Bilangan

- **Bilangan Asli**
  Himpunan bilangan yang paling awal digunakan manusia adalah himpunan bilangan yang digunakan untuk mencacah (*to count*) banyak objek. Misal untuk mencacah banyak ternak, banyak rumah, dan sebagainya. Himpunan bilangan ini disebut himpunan bilangan asli (*natural numbers*). Notasi atau lambang untuk himpunan bilangan asli adalah $\mathbb{N}$ (internasional) atau A (Indonesia). Pada modul ini akan digunakan notasi $\mathbb{N}$ sehingga ditulis

$$\mathbb{N} = \{1, 2,3, 4,5, 6,7,8, 9,10, 11, 12, \ldots\}$$

a. Sifat tertutup

Jika dua bilangan sebarang diambil dari suatu himpunan bilangan H dan hasil penjumlahan tersebut adalah bilangan dalam H maka himpunan bilangan H tertutup terhadap operasi penjumlahan (*closure property*).

Sifat tertutup operasi penjumlahan pada $\mathbb{N}$ Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli, a dan b adalah sebarang bilangan asli maka berlaku $a + b$ merupakan bilangan asli. Fakta ini dapat dikatakan bahwa $\mathbb{N}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan (*closed for addition)*.

Contoh:

Selidikilah, apakah himpunan $K = \{1,2, 3,4, 5,6, 7,8,9, 10\}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan dan berikan alasannya? Solusi: Himpunan K tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan karena terdapat bilangan 5, 7 $\in$ K dan 5 + 7 = 12, dengan 12 $\notin K$.

b. Definisi perkalian

Perkalian (multiplication) dinyatakan sebagai penjumlahan berulang. Perkalian dinyatakan sebagai berikut:

$$a \times b = \underbrace{b + b + b + \cdots b}_{a\ faktor}$$

Sifat tertutup operasi perkalian pada $\mathbb{N}$

Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli, a dan b adalah sebarang bilangan asli maka $a \times b$ juga merupakan bilangan asli. Fakta ini dapat dikatakan bahwa $\mathbb{N}$ tertutup terhadap operasi perkalian (*closed for multiplication*).

Contoh:

Diberikan himpunan B = {1, 2} dan untuk setiap a, b dalam B, didefinisikan

$a \times a = aa;\ b \times b = bb;\ a \times b = ab\ dan\ b \times a = ba.$

Himpunan B tertutup terhadap operasi perkalian karena seluruh hasil perkalian yang mungkin terjadi berada di dalam B, yaitu $1 \times 1 = 1;\ 1 \times 2 = 2;\ 2 \times 1 = 2;\ 2 \times 2 = 4$

Soal : Coba Anda buat suatu himpunan bilangan asli A, dengan tiga anggota dan suatu operasi pada A sehingga operasi tersebut tertutup pada A.

c. Sifat komutatif dan asosiatif

Untuk sebarang bilangan asli a,, dan c berlaku

i. Sifat komutatif

Pada penjumlahan: $a + b = b + a$

Pada perkalian: $ab = ba$

ii. Sifat asosiatif

Pada penjumlahan: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Pada perkalian: $(ab)c = a(bc)$

Sifat komutatif dapat kita gunakan untuk menyusun urutan bilangan yang akan dioperasikan. Sedangkan sifat asosiatif dapat kita gunakan untuk mengelompokkan bilangan-bilangan yang akan dioperasikan.

d. Sifat distributif

Misalkan a,b dan c adalah sebarang bilangan asli, maka berlaku $a(b + c) = ab + ac$.

Pada himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ berlaku sifat distributif penjumlahan terhadap perkalian.Bukti sebagai latihan

e. Definisi pengurangan

a, b dan x bilangan asli, operasi pengurangan didefinisikan dalam bentuk penjumlahan sebagai berikut : $a - b = x \leftrightarrow a = b + x$.

Berdasarkan definisi pengurangan, selidikilah apakah sifat komutatif juga berlaku untuk operasi pengurangan dan pembagian dua bilangan asli. Jelaskan jawaban Anda!

Untuk menunjukkan himpunan $\mathbb{N}$ tidak tertutup terhadap operasi pengurangan, cukup ditunjukkan satu contoh penyangkal, sebagai berikut.

Dipilih $2,3 \in \mathbb{N}$ dan didapat $2 - 3 = x \notin \mathbb{N}$, karena menurut definisi pengurangan, $2 = 3 + x$ dan tidak terdapat $x \in \mathbb{N}$ sehingga $2 = 3 + x$. Jadi, himpunan $\mathbb{N}$ tidak tertutup terhadap operasi pengurangan.

- **Bilangan Bulat**

  Mula-mula orang hanya memerlukan himpunan bilangan asli untuk perhitungan sehari-hari, misalnya seorang peternak mencacah banyak hewan ternak yang dimilikinya. Pada suatu saat, sang peternak tersebut mendapat musibah karena semua hewan ternaknya mati terserang wabah penyakit. Misalkan semula peternak tersebut mempunyai 100 ekor ternak. Karena mati semua maka hewan ternaknya habis tidak tersisa. Dalam kasus peternak tersebut, operasi hitung yang terjadi adalah 100 − 100. Untuk semesta himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$, kita tidak dapat menemukan suatu bilangan yang memenuhi hasil operasi 100 − 100. Oleh karena itu perlu dilakukan perluasan dengan menambah satu bilangan baru, yaitu 0 yang merupakan hasil operasi

$100 - 100$. Himpunan bilangan asli yang sudah diperluas dengan menambah bilangan 0 tersebut dinamakan himpunan bilangan cacah (*whole numbers*), dinotasikan dengan $\mathbb{W}$. Dengan demikian $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$.

Himpunan bilangan cacah diperluas lagi dengan menambahkan lawan dari setiap bilangan asli. Sebagai contoh, lawan dari bilangan 3, yang dinotasikan dengan -3, adalah suatu bilangan yang jika ditambahkan dengan 3 akan memberikan hasil 0. Jika lawan dari semua bilangan asli tersebut ditambahkan ke dalam himpunan bilangan cacah $\mathbb{W}$, maka akan diperoleh himpunan bilangan baru yang dinamakan himpunan bilangan bulat (*integers*), dan dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$ (berasal dari bahasa Jerman "*Zahlen*"). Dengan demikian $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dapat diklasifikasikan ke dalam tiga kelompok, yaitu:

1) himpunan bilangan bulat positif: $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
2) himpunan bilangan nol: $\{0\}$
3) himpunan bilangan bulat negatif: $\{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$.

a. Pembagian bilangan bulat

Pembagian didefinisikan sebagai lawan dari operasi perkalian. Jika a dan b masing-masing adalah bilangan bulat, dengan $b \neq 0$, maka pembagian $a \div b$, dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ dan didefinisikan sebagai $\frac{a}{b} = z \; berarti \; a = bz$

Karena pembagian didefinisikan dalam bentuk perkalian, aturan-aturan pembagian bilangan bulat identik dengan aturan-aturan perkalian bilangan bulat. Hal yang perlu diperhatikan adalah pada pembagian $a \div b$, syarat $b \neq 0$ harus dipenuhi karena pembagian dengan 0 tidak didefinisikan

Perhatikan dua situasi berikut.

1) Pembagian bilangan bukan 0 dengan 0.

$$a \div 0 \leftrightarrow \frac{a}{0} = x$$

Menurut definisi pembagian, bilangan x seharusnya adalah bilangan yang menyebabkan $a = 0 \times x$. Akan tetapi $0 \times x = 0$ untuk setiap x. Karena diketahui $a \neq 0$, maka situasi tersebut menjadi tidak mungkin. Dengan demikian $a \div 0$ tidak ada atau tidak didefinisikan.

2) Pembagian 0 dengan 0.

$$a \div 0 \leftrightarrow \frac{0}{0} = x$$

Berdasarkan kasus $\frac{a}{b}$, $\neq 0$, jelaskan makna $\frac{0}{0}$ dan apakah terdapat suatu bilangan x yang menyebabkan $0 \div 0$ menjadi bermakna?

Menurut definisi pembagian, jelas bahwa setiap nilai x dapat memenuhi karena $0 \times x = 0$ untuk setiap x, sehingga menjadikan kebingungan. Perhatikan contoh berikut:

Jika $\frac{0}{0} = 2$ maka $0 \times 2 = 0$ dan jika $\frac{0}{0} = 5$ maka $0 \times 5 = 0$.

Karena perkalian 0 masing-masing dengan 2 dan 5 menghasilkan bilangan yang sama, yaitu 0, maka dapat kita simpulkan bahwa $2 = 5$. Hal ini jelas salah sehingga $0 \div 0$ dinyatakan sebagai tidak tentu (*indeterminate*).

Himpunan $\mathbb{Z}$ tidak tertutup terhadap operasi pembagian. Untuk membuktikan, pilih $4, 5 \in \mathbb{Z}$ dan $4 \div 5 = \frac{4}{5}$, dengan $\frac{4}{5} \notin \mathbb{Z}$.

b. Sifat tertutup bilangan bulat

1) tertutup terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$.
2) tertutup terhadap operasi perkalian, yaitu untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $(a \times b) \in \mathbb{Z}$.

c. Sifat asosiatif bilangan bulat

1) asosiatif terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$.
2) asosiatif terhadap operasi perkalian, yaitu untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku

   $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

Sifat Komutatif Bilangan Bulat

1) komutatif terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk a,b ∈ $\mathbb{Z}$ berlaku a + b = b + a. b)
2) komutatif terhadap operasi perkalian, yaitu untuk a,b, c ∈ $\mathbb{Z}$ berlaku a × b = b × a.

d. Sifat distributif bilangan bulat

Untuk a, b, $c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

e. Elemen identitas

1) terhadap operasi penjumlahan, yaitu terdapat dengan tunggal elemen $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$.
2) terhadap operasi perkalian, yaitu terdapat dengan tunggal elemen 1 $\in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$.

f. Invers penjumlahan

Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat dengan tunggal elemen $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$, dengan 0 merupakan identitas penjumlahan.

g. Aturan kanselasi bilangan bulat

1) Terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk semua $a, x, y \in \mathbb{Z}$, apabila $a + x = a + y$ maka $x = y$.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $a + x = a + y$ maka $x = y$.

$a + x = a + y$ hipotesis

$-a + (a + x) = -a + (a + y)$ kedua ruas ditambah $-a$

$(-a + a) + x = (-a + a) + y$ mengapa?

$0 + x = 0 + y$ mengapa?

$x = y$ mengapa?

2) Terhadap operasi perkalian, yaitu untuk $a, x, y \in \mathbb{Z}$, jika $a \neq 0$ dan $a \times x = a \times y$ maka $x = y$

   Coba Anda buktikan aturan kanselasi perkalian dengan kontraposisi dari implikasinya dan Anda bandingkan kedua cara bukti tersebut !

- **Bilangan Rasional**

Kebutuhan manusia yang semakin berkembang, khususnya terkait dengan keakuratan dalam perhitungan dan pengukuran menyebabkan perlunya perluasan sistem himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Untuk keperluan ini, dibentuk sistem bilangan baru yang disebut himpunan bilangan rasional.

Himpunan bilangan rasional, dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$, adalah himpunan semua

bilangan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b adalah bilangan bulat

dan $b \neq 0$.

Perhatikan bahwa bilangan rasional berbentuk pecahan. Pada aritmetika jika suatu bilangan dituliskan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ berarti $a \div b$, dengan a dinamakan pembilang (*numerator*) dan b dinamakan penyebut (*denominator*). Apabila a dan b keduanya

bilangan bulat, maka $\frac{a}{b}$ dinamakan sebagai:

1) pecahan biasa (*proper fraction*) jika $a < b$
2) pecahan tak biasa (*improper fraction*) jika $a > b$
3) bilangan cacah (*whole numbers*) jika b membagi habis a

Untuk setiap bilangan rasional $\frac{a}{b}$ yang tidak sama dengan 0, terdapat suatu invers

perkalian $\frac{b}{a}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. Untuk $\frac{a}{b} = 0$, kenapa tidak berlaku?

Perhatikan bahwa $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba}$ Bentuk $\frac{b}{a}$ = 0, sering dinamakan sebagai kebalikan (reciprocal) dari $\frac{a}{b}$

a. Sifat dasar pecahan

Sifat dasar pecahan (*fundamental property of fractions*) yaitu jika $\frac{a}{b}$ adalah sebarang bilangan rasional dan x adalah sebarang bilangan bulat yang tidak sama dengan 0, maka berlaku

$$\frac{a \times x}{b \times x} = \frac{x \times a}{x \times b} = \frac{a}{b}$$

Langkah-langkah untuk menyederhanakan suatu pecahan, sebagai berikut :

1) tentukan faktor persekutuan terbesar dari pembilang dan penyebut,
2) gunakan sifat dasar pecahan untuk menyederhanakan pecahan tersebut.

Contoh:

Sederhanakan pecahan berikut:

1) $\frac{24}{30}$
2) $\frac{300}{144}$

Solusi

1) Langkah pertama tentukan faktor persekutuan terbesar dari pembilang dan penyebut.

$24 = 2^{3} \cdot 3^{1}$

$30 = 2^{1} \cdot 3^{1} \cdot 5^{1}$

FPB(24,30) = $2^{1} \cdot 3^{1} \cdot 5^{0} = 6$

Selanjutnya gunakan sifat dasar pecahan untuk menyederhanakan pecahan.

$$\frac{24}{30}=\frac{6.2^2}{6.5}=\frac{2^2}{5}=\frac{4}{5}$$

2) Dengan cara pada a., Anda selesaikan soal b dengan cepat dan tepat

Operasi hitung bilangan rasional

Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah bilangan-bilangan rasional, maka berlaku :

1) terhadap operasi penjumlahan berlaku $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

2) terhadap operasi pengurangan berlaku $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{(ad-bc)}{bd}$

3) terhadap operasi perkalian berlaku $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

4) terhadap operasi pembagian berlaku $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$, dengan $\frac{c}{d}\neq 0$.

Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian (dengan bilangan bulat bukan 0).

Contoh

Buktikan bahwa himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Q}$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan. Misalkan $\frac{x}{y}$

dan $\frac{w}{z}$ adalah sebarang dua bilangan rasional maka x, y, w, z $bilangan\ real$, $y\neq 0$, $z\neq 0$. Menurut definisi penjumlahan, $\frac{x}{y}+\frac{w}{z}$

$$=\frac{xz+wy}{yz}$$

Karena $x, y, w, z\ bilangan\ real y\neq 0, z\neq 0\ maka\ yz\neq 0$ sehingga $\frac{xz+wy}{yz}$

bilangan rasional

b. Sifat tertutup bilangan rasional

1) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$,

   maka berlaku $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$.

2) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$,

   maka $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d} \in \mathbb{Q}$

c. Sifat asosiatif

1) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$,

   maka berlaku $\frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f}$

2) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, maka berlaku

   $\frac{a}{b} \times (\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}) = = (\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) \times \frac{e}{f}$

d. Sifat komutatif

1) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk setiap untuk $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$,

   maka berlaku $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

2) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk setiap $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$,

   maka berlaku $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

e. Sifat distributif

Untuk setiap $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} \times (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$

f. Elemen identitas

1) terhadap operasi penjumlahan, yaitu terdapat dengan tunggal elemen $\frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$

   sedemikian hingga untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ berlaku $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

2) terhadap operasi penjumlahan, yaitu terdapat dengan tunggal elemen 1

   $1 \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ berlaku $\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

g. **invers**

1) terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ terdapat dengan tunggal elemen $(-\frac{a}{b}) \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = (-\frac{a}{b}) + \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ dengan $\frac{0}{1}$ merupakan identitas penjumlahan.
2) terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ terdapat dengan tunggal elemen $(-\frac{a}{b}) \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = (-\frac{a}{b}) + \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ dengan $\frac{0}{1}$ merupakan identitas penjumlahan.
3) terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ terdapat dengan tunggal elemen $(-\frac{a}{b}) \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = (-\frac{a}{b}) + \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ dengan $\frac{0}{1}$ merupakan identitas penjumlahan.
4) terhadap operasi penjumlahan, yaitu untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ terdapat dengan tunggal elemen $(-\frac{a}{b}) \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = (-\frac{a}{b}) + \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ dengan $\frac{0}{1}$ merupakan identitas penjumlahan.
5) terhadap operasi perkalian, yaitu untuk setiap $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, dengan $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$, terdapat dengan tunggal elemen $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, dengan $\frac{1}{1} = 1$ merupakan identitas perkalian.

- **Bilangan Irrasional**

  Yoga mempunyai sebidang kebun berbentuk persegi dengan luas 1600 m^2. Dia merencanakan untuk membuat pagar di sekeliling kebun tersebut. Berapa panjang pagar yang diperlukan oleh Yoga? Supaya dapat membantu Yoga, terlebih dahulu harus diketahui panjang sisi kebun agar dapat menghitung keliling kebun tersebut. Misal panjang sisi kebun adalah p meter. Berarti Yoga harus menyusun persamaan $p \times p$ = 1600. Dalam hal ini p = 40 karena 40 × 40 = 1600 atau 40^2 =

1600. Dengan demikian Yoga harus membangun pagar sepanjang 4 × 40 = 160 meter. Proses menentukan nilai p = 40 ini disebut proses melakukan penarikan akar kuadrat atau akar pangkat dua dari 1600 dan ditulis sebagai $\sqrt{1600}$ = 40. Bentuk $\sqrt{1600}$ dibaca "akar kuadrat dari 1600" atau "akar pangkat dua dari 1600". Penting untuk dicermati bahwa walaupun $(-40) \times (-40) = 1600$, akan tetapi dalam situasi ini panjang sisi tidak mungkin negatif sehingga kita hanya menggunakan nilai p = 40. Secara umum, jika a tidak negatif (a ≥ 0) maka $\sqrt{a}$ adalah suatu bilangan tidak negatif yang hasil kuadratnya sama dengan a. Akar kuadrat dari suatu bilangan nonnegatif n adalah suatu bilangan yang jika dikuadratkan hasilnya adalah n. Secara notasi, akar kuadrat positif dari n, dinyatakan dengan $\sqrt{n}$, didefinisikan sebagai suatu bilangan sedemikian hingga $\sqrt{n}\,\sqrt{n} = n$

Secara umum dapat disiimpulkan :

- Jika $a \geq 0$, maka $\sqrt[n]{a}$= b jika dan hanya jika b^n = a dan b ≥ 0.
- Jika $a < 0$ dan n bilangan ganjil, maka $\sqrt[n]{a}$= b jika dan hanya jika b^n = a.

Anda coba untuk mencari penyelesaian p^2 = 2 ?. Karena tidak dapat ditemukan bilangan rasional p sedemikian hingga p^2 = 2, maka $\sqrt{2}$ disebut bilangan irrasional. Himpunan bilangan irrasional adalah himpunan bilangan yang representasi desimalnya tidak berhenti (nonterminating) atau tidak berulang (*nonrepeating*).

Beberapa contoh bilangan irrasional selain $\sqrt{2}$ misalnya $\sqrt{3}, \sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$.

Contoh bilangan irrasional yang lain adalah bilangan π yang merupakan rasio keliling lingkaran terhadap diameternya dan bilangan e yang merupakan bilangan yang digunakan sebagai bilangan dasar dalam pertumbuhan dan peluruhan. Nilai π sebesar 3,141592654 dan e adalah adalah 2,718281828 yang diperoleh dengan menggunakan kalkulator hanya berupa nilai pendekatan, bukan nilai eksak.

Contoh

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrasional.

Bukti:

Dibuktikan dengan metode kontradiksi.

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irrasional. Artinya $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional. Karena $\sqrt{2}$ bilangan rasional maka bentuk $\sqrt{2}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

dengan m dan n merupakan bilangan bulat dan faktor persekutuan terbesar dari m dan n adalah 1. Selanjutnya kedua ruas dikuadratkan, diperoleh

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$m^2 = 2n^2$$

Perhatikan bahwa bentuk $m^2 = 2n^2$ menyebabkan m^2 merupakan bilangan genap, menurut definisi bilangan genap. Akibatnya m juga merupakan bilangan genap. Karena m bilangan genap maka $m = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Kemudian substitusikan persamaan $m = 2k$ ke persamaan $m^2 = 2n^2$, diperoleh $(2k)^2 = 2n^2$ atau $4k^2 = 2n^2$. Kedua ruas persamaan dibagi dengan 2, diperoleh $n^2 = 2k^2$. Hal ini berakibat n^2 merupakan bilangan genap dan n juga bilangan genap. Padahal jelas bahwa m merupakan bilangan genap. Sebagai akibatnya, baik m dan n mempunyai faktor persekutuan terbesar 2. Hal ini bertentangan dengan pengadaian bahwa m dan n mempunyai faktor persekutuan 1. Terjadi kontradiksi. Pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrrasional.

a. Operasi dengan bentuk akar

Beberapa syarat yang perlu dipenuhi adalah menyederhanakan suatu bentuk akar yang merupakan bilangan irasional. Suatu bentuk akar dapat disederhanakan (*simplified*) jika:

1) Bilangan di bawah tanda akar (*radicand*) tidak mempunyai faktor dengan pangkat lebih besar dari 1
2) Bilangan di bawah tanda akar tidak dituliskan dalam bentuk pecahan atau menggunakan pangkat negatif
3) Tidak ada notasi akar pada penyebut dari pecahan

b. Aturan bentuk akar

Misal a dan b adalah bilangan-bilangan positif, maka

4) $\sqrt{0} = 0$

5) $\sqrt{a^2} = a$

6) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

7) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

- **Bilangan Real**

Himpunan bilangan real merupakan gabungan dari himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irrasional dan dinotasikan dengan $\mathbb{R}$

a. **Representasi desimal**

Perhatikan representasi desimal dari sebuah bilangan real. Jika bilangan tersebut adalah bilangan rasional, maka representasi desimalnya adalah berhenti (*terminating*) atau berulang (*repeating)*. Contoh: Dengan menggunakan kalkulator, tentukan jenis representasi desimal dari bilangan-bilangan rasional berikut.

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{2}{3}$

3) $\frac{1}{6}$

4) $\frac{1}{7}$

Solusi

1) $\frac{1}{4}$ = 0,25 merupakan desimal berhenti (terminating decimal)

2) $\frac{2}{3}$ = 0,666 merupakan desimal berulang (repeating decimal),

3) $\frac{1}{6}$ = 0,166… merupakan desimal berulang (repeating decimal)

4) $\frac{1}{7} \approx 0{,}143$ tampilan layar kalkulator menunjukkan 0,1428571429

Bandingkan hasil perhitungan menggunakan kalkulator dengan menggunakan pembagian bersusun. Apabila suatu desimal berulang, kita menggunakan tanda bar "‾" untuk menunjukkan banyak angka perulangannya. Sebagai contoh:

- Perulangan satu angka $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$
- Perulangan dua angka $\frac{5}{11} = 0,\overline{45}$; ; $\frac{1}{6} = 0,16$

Bilangan real yang merupakan bilangan irrasional mempunyai representasi desimal yang tidak berhenti (*nonterminating*) atau tidak berulang (*nonrepeating*).

Sebagai contoh:

$\sqrt{2}$ = 1,414213 …

π = 3,141592 …

e = 2,71828 …

Pada bilangan-bilangan tersebut tidak terdapat pola perulangan sehingga merupakan bilangan irrasional.

Beberapa cara untuk mengklasifikasikan bilangan real, sebagai berikut:

1) Bilangan positif, bilangan negatif, atau nol
2) Bilangan rasional atau bilangan irrasional
   - Jika representasi desimalnya berhenti, maka merupakan bilangan rasional
   - Jika representasi desimalnya berulang, maka merupakan bilangan rasional
   - Jika bilangan tersebut tidak mempunyai representasi desimal yang berhenti atau berulang, maka merupakan bilangan irrasional

b. Sifat-sifat himpunan bilangan Real

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka berlaku

	Penjumlahan	Perkalian
Tertutup	$(a + b) \in \mathbb{R}$	$ab \in \mathbb{R}$
Asosiatif	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Komutatif	$a + b = b + a$	$ab = ba$

Distributif perkalian terhadap penjumlahan	$a(b + c) = ab + ab$

c. Elemen identitas

1) terhadap operasi penjumlahan yaitu terdapat $0 \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $0 + a = a + 0 = a$. Bilangan 0 tersebut dinamakan elemen identitas pada penjumlahan (*identity for addition*).
2) Terhadap operasi penjumlahan yaitu terdapat bilangan $1 \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $1 \times a = a \times 1 = a$.
   Bilangan 1 tersebut dinamakan elemen identitas pada perkalian (*identity for multiplication*).

d. Sifat Invers

1) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk setiap bilangan $a \in \mathbb{R}$, terdapat dengan tunggal bilangan $(-a) \in \mathbb{R}$, dinamakan lawan atau invers penjumlahan (additive inverse) dari a, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$
2) terhadap operasi perkalian yaitu untuk setiap bilangan $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, terdapat dengan tunggal bilangan $a^{-1} = (\frac{1}{a}) \in \mathbb{R}$, dinamakan lawan atau invers perkalian (*multiplication inverse*) dari a, sehingga $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$.

Perhatikan contoh berikut. 5 × … = …× 5 = 1

Akan dicari bilangan yang jika dikalikan dengan 5 hasilnya 1.

$5 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 5 = 1$

Karena $\frac{1}{5} \in \mathbb{R}$, maka $\frac{1}{5}$ merupakan invers dari 5 pada perkalian.

- **Contoh Pembuktian Terkait Sistem Bilangan**

Uraian contoh pembuktian terkait sistem bilangan.

a. Buktikan bahwa hasil penjumlahan dua bilangan bulat genap merupakan bilangan bulat genap.

Bukti:

Dibuktikan dengan metode pembuktian langsung.

Misalkan m dan n merupakan sebarang bilangan bulat genap. Akan dibuktikan bahwa $m + n$ merupakan bilangan bulat genap. Menurut definisi bilangan genap, $m = 2r$ dan $n = 2s$ untuk r dan s sebarang anggota bilangan bulat.

Maka

$$\begin{aligned} m + n &= 2r + 2s \\ &= 2(r + s) \end{aligned}$$

Misalkan $t = r + s$. Perhatikan bahwa t jelas merupakan bilangan bulat karena t adalah hasil penjumlahan bilangan-bilangan bulat. Sehingga bentuk $m + n$ dapat dituliskan sebagai $m + n = 2t$, dengan t merupakan bilangan bulat. Karena $m + n = 2t$, maka sesuai dengan definisi bilangan genap hasil penjumlahan $m + n$ juga bilangan genap. Dengan demikian terbukti bahwa hasil penjumlahan dua bilangan bulat genap merupakan bilangan bulat genap.

b. Buktikan bahwa hasil perkalian dua bilangan bulat ganjil juga merupakan bilangan bulat ganjil.
   Coba Anda buktikan, sebagai acuan bahwa m suatu bilangan ganjil jika $m = 2n + 1$, untuk suatu n bilangan bulat.
c. Buktikan bahwa hasil penjumlahan bilangan rasional dan bilangan irrasional merupakan bilangan irrasional.
   Bukti:
   Dibuktikan dengan metode kontradiksi. Andaikan hasil penjumlahan bilangan rasional dan bilangan irrasional bukan merupakan bilangan irrasional. Dengan kata lain, hasil penjumlahannya merupakan bilangan rasional.
   Misalkan terdapat bilangan rasional r dan bilangan irrasional s sedemikian hingga $r + s$ merupakan bilangan rasional.
   Menurut definisi bilangan rasional, $r = \frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$, untuk suatu bilangan bulat a,b, c, dan d, dengan $b \neq 0$ dan $d \neq 0$. Menggunakan substitusi diperoleh

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} - \frac{\mathrm{a}}{b}$$

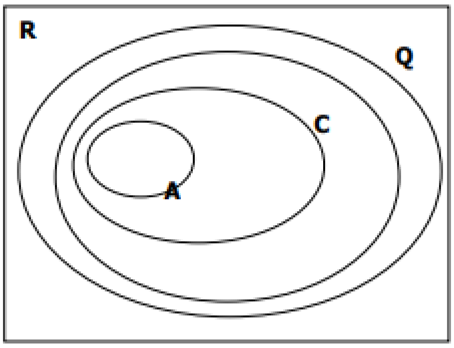
$$\frac{a}{b} + S = \frac{c}{d} \text{ sehingga } \frac{bc-ad}{bd}$$

Perhatikan bahwa bentuk $bc - ad$ dan bd, keduanya merupakan bilangan bulat. Mengapa, jelaskan pendapat Anda. Akibatnya s merupakan hasil pembagian dua bilangan bulat, $bc - ad$ dan bd, dengan $bd \neq 0$. Sehingga menurut definisi bilangan rasional, s merupakan bilangan rasional. Hal ini menyebabkan kontradiksi dengan pemisalan awal bahwa s merupakan bilangan irrasional. Pengandaian salah. Dengan demikian terbukti bahwa hasil penjumlahan bilangan rasional dan bilangan irrasional merupakan bilangan irrasional.

2. Keterbagian, FPB, dan KPK

- **Keterbagian**

  Posisi himpunan bilangan bulat dalam himpunan bilangan dapat digambarkan dalam diagram Venn berikut ini:



Gambar 2. Diagram Venn

A = himpunan semua bilangan asli = $\{1,2,3,\ldots\}$, C = himpunan semua bilangan cacah = $\{0,1,2,3,\ldots\}$, B = himpunan semua bilangan bulat = $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$, Q = himpunan semua bilangan rasional $= \{\frac{p}{q} \mid p \text{ dan } q \text{ bilangan bulat dengan } q \neq 0\}$, dan R = himpunan semua bilangan real. Di antara Q dan R ada himpunan bilangan irasional. Sehingga dapat dikatakan, himpunan bilangan real adalah gabungan antara himpunan bilangan rasional (Q) dengan himpunan semua bilangan irasional.

Dalam himpunan bilangan bulat, dapat dikenai relasi keterbagian. Sifatsifat keterbagian pada bilangan bulat merupakan dasar pengembangan teori bilangan. Pengertian relasi keterbagian disajikan pada Definisi 1.1.

Definisi 1.1

Bilangan bulat a membagi habis bilangan bulat b (ditulis $a|b$) apabila terdapat bilangan bulat k sehingga $b = ak$. Jika a tidak membagi habis b maka dituliskan $a \nmid b$.

Contoh 1.1

3|21 karena terdapat bilangan bulat yakni 7 sehingga 21 = 3.7

$5 \nmid 12$ karena tidak ada bilangan bulat k sehingga 12 = 5. k

−8|0 karena terdapat bilangan bulat yakni 0 sehingga 0 = -8.0

Istilah-istilah lain yang mempunyai arti sama dengan $a|b$ adalah "a faktor dari b" atau "a pembagi b" atau "b kelipatan a". Relasi keterbagian pada bilangan bulat memenuhi sifat-sifat antara lain sebagai berikut:

Teorema 1.1

Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$.

Teorema 1.2

Jika $a|b$ dan $a|(b + c)$ maka $a|c$.

Teorema 1.3

Jika $p|q$, maka $p|qr$ untuk semua $r \in$ Z

Teorema 1.4

Jika $p|q$ dan $p|r$, maka $p|q + r$

- **Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)**

  Untuk setiap bilangan bulat a paling sedikit memiliki dua faktor yaitu 1 dan dirinya sendiri. Suatu bilangan bulat dapat memiliki faktor selain 1 dan dirinya sendiri. Sebagai contoh 20 memiliki faktor 1, 2, 4, 5, 10 dan 20, sedangkan 30 memiliki faktor 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 dan 30. Dari contoh ini diperoleh bahwa 1, 2, 5 dan 10 merupakan faktor dari 20 dan sekaligus faktor dari 30. Fakta tersebut mengantarkan ke konsep faktor persekutuan, dan faktor persekutuan terbesar.

  Definisi 1.2

  Suatu bilangan bulat d disebut faktor persekutuan dari a dan b apabila $d|a$ dan $d|b$.

  Perlu diketahui bahwa untuk setiap dua bilangan bulat a dan b memiliki paling sedikit satu faktor persekutuan yaitu 1. Jika d adalah faktor persekutuan dari a dan b maka $d|ma + nb$ untuk setiap bilangan bulat m dan n. Jika a dan b dua bilangan bulat tak nol, maka a dan b hanya memiliki sejumlah hingga faktor dan 8 oleh karenanya himpunan faktor persekutuan dari a dan b juga berhingga. Karena elemen-elemen himpunan faktor persekutuan dari a dan b merupakan bilanganbilangan bulat maka himpunan tersebut memiliki elemen terbesar. Bilangan bulat terbesar ini disebut faktor persekutuan terbesar (FPB) dari a dan b. Konsep FPB disajika pada Definisi 1.3

  Definisi 1.3

  Bilangan bulat positif d disebut FPB dari a dan b jika dan hanya jika:

  (i). $d|a$ dan $d|b$

  (ii). jika $c|a$ dan $c|b$ maka $c \leq d$.

  Faktor persekutuan terbesar dari a dan b dinotasikan dengan $FPB(a, b)$. Beberapa hal yang perlu diketahui tentang FPB antara lain:

  (i). FPB (0,0) tidak didefinisikan.

  (ii). FPB (a, b) selalu bilangan bulat positif, sehingga FPB $(a, b) \geq 1$.

  (iii). FPB $(a, b) = FPB$ $(a, -b) = FPB$ $(-a, b) = FPB$ $(-a, -b)$.

  Contoh 1.2

a). FPB dari 30 dan 105 adalah 15, sehingga ditulis FPB (30, 105) = 15. b). FPB dari 9 dan 20 adalah 1, sehingga ditulis FPB (9,20) = 1.

Teorema 1.5 Jika FPB (a, b) = d maka FPB (a: d, b: d) = 1.

Contoh 1.3

Karena FPB (24,30) = 6 maka FPB (24: 6, 30: 6) = FPB (4,5) = 1.

Definisi 1.4

Bilangan bulat a dan b disebut relatif prima (saling prima) jika FPB (a, b) = 1.

Dari contoh 1.2 diperoleh bahwa 9 dan 20 saling prima, sedangkan dari

contoh 1.3 diperoleh bahwa 4 dan 5 saling prima.

Jika $|a|$ dan $|b|$ adalah bilangan-bilangan bulat yang kecil maka FPB (a, b) dapat dihitung dengan mudah (singkat). Tidak demikian halnya $|a|$ dan $|b|$ adalah bilangan-bilangan yang besar. Sebagai contoh jika a = 26020473 dan b = 26020867 maka FPB (a, b) tidak dapat dihitung dengan singkat. Berikut ini akan sajikan cara yang efisien untuk menentukan FPB dari dua bilangan bulat.

Teorema 1.6 (Algoritma Pembagian Bilangan Bulat)

Untuk setiap bilangan bulat positif a dan b terdapat dengan tunggal bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga b = qa + r dengan 0 ≤ r < a.

Contoh 1.4

Jika a = 24 dan b = 81 maka q = 3 dan r = 9, sebab 81 = (3). (24) + 9.

Terlihat bahwa $FPB\ (81{,}24)\ =\ 3$ dan $FPB\ (24{,}9)\ =\ 3$.

Jika a dan b sebarang bilangan bulat, maka Teorema 1.6 tetap berlaku tetapi dengan syarat 0 ≤ r < $|a|$.

Teorema 1.7

Jika b = qa + r, maka $FPB\ (b, a)\ =\ FPB\ (a, r)$.

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 1.6 dan Teorema 1.7 dapat ditentukan FPB dari sebarang dua bilangan bulat.

Contoh 1.5

Tentukan FPB $(5767,4453)$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Teorema 1.6 berkali-kali maka diperoleh:

$5767 = 4453 . 1 + 1314$

$4453 = 1314 . 3 + 511$

$1314 = 511. 2 + 292$

$$511 = 292 . 1 + 219$$

$$292 = 219 . 1 + 73$$

$$219 = 73 . 3 + 0$$

Berdasarkan Teorema 1.7 diperoleh $FPB(5767,4453) = FPB(4453,1314) = FPB(1314,511) = FPB(511,292) = FPB(292,219) = FPB(219,73) = FPB(73,0) = 73$.

Jadi $FPB(5767,4453) = 73$.

Teorema 1.8

Misalkan a dan b bilangan-bilangan bulat positif. Menggunakan algoritma pembagian diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$a = bq + r$, dengan $0 \leq r < b$

$b = rq_1 + r_1$, dengan $0 \leq r_1 < r$

$r = r_1q_2 + r_2$, dengan $0 \leq r_2 < r_1$

$r_{k-2} = r_k-_1q_k + r_k$, dengan $0 \leq r_k < r_{k-1}$

$r_{k-1} = r_kq_k + 1$.

Diperoleh $FPB(a, b) = rk$.

Teorema 1.9

Untuk setiap bilangan bulat tak nol a dan b terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga $FPB(a,b) = am + bn$. Petunjuk: Teorema 1.9 dapat dibuktikan dengan menggunakan Teorema 1.8.

Contoh 1.6

Jika $a = 247\ dan\ b = 299$, maka diperoleh:

$299 = 247.1 + 52$

$$247 = 52.4 + 39$$

$$52 = 39.1 + 13$$

$$39 = 13.3$$

Berdasarkan Teorema 1.6 diperoleh $FPB(a, b) = 13$.

Selanjutnya akan ditentukan bilangan bulat m dan n sehingga

$13 = 247m + 299n$.

Caranya sebagai berikut.

$13 = 52 - 39.1$

$$= 52 - (247 - 52.4)$$

$$= 52.5 - 247$$

$$= (299 - 247.1).5 - 247$$

$$= 299.5 - 247.6$$

Jadi $m = -6 \; dan \; n = 5$.

Akibat Teorema 1.9

Jika a dan b relatif prima maka ada bilangan bulat m dan n sehingga $am + bn = 1$.

Teorema 1.10

Jika $d|ab$ dan $FPB(d, a) = 1$, maka $d|b$.

Teorema 1.11 Jika $c|a$ dan $c|b$ dengan $(a, b) = d$ maka $c|d$.

Contoh 1.7

Karena $2|32$ dan $2|40$, maka $2|8 = FPB\ (32,40)$.

- **Bilangan Prima dan Komposit**

  Setiap bilangan asli yang lebih besar dari 1mempunyai paling sedikit dua buah pembagi atau faktor, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.

  1. Bilangan prima adalah bilangan asli yang lebih besar dari 1 dan hanya tepat mempunyai dua buah pembagi yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.
  2. Bilangan komposit adalah bilangan asli lebih besar dari 1 yang bukan bilangan prima.

3. Bilangan 1 hanya mempunyai sebuah pembagi, yaitu 1 itu sendiri, sehingga 1 bukan bilangan prima dan bukan bilangan komposit. Ini adalah alasan mengapa 1 merupakan bilangan khusus.
4. Tidak ada bilangan asli yang sekaligus merupakan bilangan prima dan bilangan komposit.
5. Satu-satunya bilangan prima yang genap adalah 2.
6. Jika n adalah bilangan asli lebih dari 1 yang tidak mempunyai pembagi bukan merupakan bilangan prima kurang dari atau sama dengan $\sqrt{n}$, maka n merupakan bilangan prima.

   Contoh bilangan prima 2, 3, 5, 7,29

   Cobalah Anda membuat rumus eksplisitnya dan apa kesimpulannya !.

- **Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)**

Kelipatan setiap bilangan dari suatu kelompok bilangan bulat dinamakan sebagai kelipatan persekutuan dari bilangan-bilangan bulat tersebut. Dari kelipatan persekutuan-kelipatan persekutuan pada suatu kelompok bilangan bulat, kelipatan persekutuan yang paling kecil disebut Kelipatan Persekutuan Terkecildan disingkat KPK.

Notasi untuk KPK dari bilangan bulat m dan n adalah KPK[m,n].

Contoh

Hitung KPK dan FPB dari 198, 216 dan 252.

Penguraian atas faktor-faktor prima dari bilangan-bilangan tersebut adalah:

$$198 = 2 \,.\, 3^2 \,.\, 11 = 2^1 \,.\, 3^2 \,.\, 11^1$$
$$216 = 2^3 \,.\, 3^3 = 2^3 \,.\, 3^3$$
$$252 = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 7 = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 7^1$$

Jadi diperoleh:

$FPB(198, 216, 252)$

$$= 2\, min(1,3,2).\, 3\, min(2,3,2).\, 7 \min(0,0,1)\, , 11 min(1,0,0)$$
$$= 2^1 \,.\, 3^2 \,.\, 7^0 \,.\, 11^0 = 18.$$

$KPK\ [198,216,252]$

$$= 2\, maks(1,3,2).\, 3\, maks(2,3,2).\, 7 maks(0,0,1).\, 11 maks(1,0,0)$$

$= 2^3 . 3^3 . 7^1 . 11^1$

$= 16632$

Definisi 1.6

Bilangan-bilangan bulat $a1, a2, \dots, an$ dengan $ai \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ mempunyai kelipatan persekutuan b jika $ai \mid b$ untuk setiap i. Kelipatan persekutuan bilangan-bilangan bulat $a1, \dots, an$ selalu ada, yaitu $\prod_{i=1}^{n} = a_{1,}.a_{2,} \dots a_n$

Definisi 1.7

Jika $a_{1,}.a_{2,} \dots a_n$ bilangan-bilangan bulat dengan $ai \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n,$ maka kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari bilangan-bilangan tersebut adalah bilangan bulat positif terkecil di antara kelipatan-kelipatan persekutuan dari $a_{i,}.a_{2,} \dots a_n$

KPK dari a_1 dan a_2 dituliskan sebagai $KPK\ [a1, a2]$.

KPK dari $a1, a2, \dots, an$ dituliskan sebagai $KPK\ [a1, a2, \dots, an]$.

Teorema 1.16

Jika b suatu kelipatan persekutuan dari $a1, a2, \dots, an$ maka $KPK\ [a1, a2, \dots, an] | b$.

Contoh

Karena 48 merupakan kelipatan persekutuan dari 2, 3, 6 dan 8 maka $24 = KPK[2, 3, 6, 8] | 48$.

Teorema 1.17

Jika m > 0 maka $KPK[ma, mb]$ = m × $KPK[a, b]$.

Teorema 1.18

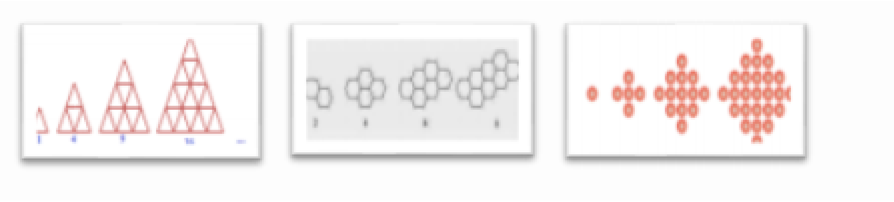
Jika a dan b bilangan-bilangan bulat positif, maka $KPK[a, b]$ × $FPB(a, b)$ = ab.

Contoh

Jika n bilangan bulat positif maka $FPB(n, n + 1) = 1$. Akibatnya $KPK[n, n + 1] = n(n + 1)$.

3. Pola Bilangan

Untuk mengawali pembahasan pola bilangan, terlebih dahulu



Gambar 3. Bilangan Berpola

Tiga buah gambar berpola, yang masing-masing berpola segitiga samasisi, berpola persegi panjang, dan berpola persegi. Dalam mempelajari bilangan, ditemukan juga beberapa kumpulan bilangan yang memiliki ciri atau pola tertentu. Pola pada bilangan ini berupa aturan atau rumus yang digunakan dalam menentukan urutan atau letak suatu bilangan dari sekumpulan bilangan yang telah ditentukan.

Definisi

Pola bilangan adalah suatu aturan tertentu yang diberlakukan pada kumpulan bilangan.

Suatu pola bilangan yang diberlakukan pada himpunan bilangan akan menghasilkan susunan bilangan yang berpola dalam himpunan tersebut.

Contoh:

a) Misalkan himpunan S, dengan $S = \{5, 9, 17, 13, 21\}$. Diberikan pola bilangan pada S, sebagai berikut bilangan pertama adalah 5 dan bilangan berikutnya adalah empat lebih besar dari bilangan sebelumnya. Dengan menerapkan pola tersebut didapat sususan bilangan berpola dari S yaitu $5, 9, 13, 17,21$

b) Dalam memberi nomor rumah di suatu jalan, ditentukan aturan yaitu, rumah yang terletak di sebelah kanan dari arah pintu gerbang harus memiliki nomor genap dan rumah yang berada di sebelah kiri harus bernomor ganjil. Aturan penomoran rumah tersebut membentuk susunan bilangan yang berpola, yaitu pola bilangan genap $2, 4, 6, \dots, 2n$ dan pola bilangan ganjil $1, 3, 5, \dots, (2n - 1)$, dengan n bilangan asli. Pengaturan ini memberikan kemudahan dalam mencari suatu rumah, cukup dengan melihat genap atau ganjil nomor rumah yang dicari.

Untuk memudahkan dalam mengingat, jika memungkinkan suatu pola bilangan dalam himpunan bilangan diberi nama dan namanya disesuaikan dengan bilangan-bialngan penyusunnya.

Contoh :

a) $1, 2, 3, \dots, n,$ dinamakan pola n bilangan asli pertama

b) $2, 4, 6, \dots, 2n$ disebut pola n bilangan asli genap pertama.

Suatu pola bilangan dapat dimodifikasi unsur-unsurnya sehingga diperoleh pola bilangan yang baru.

Contoh

Diberikan pola n bilangan genap pertama, yaitu $2, 4, 6, \dots, 2n$. Akan dibentuk pola bilangan baru dengan aturan bahwa suku bilangan pertama 2, suku bilangan kedua hasil jumlahan dua suku pertama, yaitu 6 dan suku bilangan ke-n adalah jumlahan n suku bilangan pertama. Berdasarkan aturan tersebut didapat pola bilangan baru, yaitu $2, 2+4, 2+4+6, 2+4+6, \dots, 2+4+6+\cdots+2n,$ atau $2, 6, 12, 20, 30, \dots, n(n+1)$. Pola bilangan tersebut dinamakan pola n bilangan persegi panjang pertama.

Contoh

Buatlah dugaan (prediksi) rumus jumlah n bilangan bulat positif ganjil yang pertama.

Solusi.

Mula-mula akan dibuat dugaan pola jumlahan n bilangan bulat positif ganjil yang pertama, untuk $n = 1, 2,3, 4,5$

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

Berdasarkan nilai-nilai tersebut, kita dapat menduga bahwa jumlah n bilangan bulat positif ganjil yang pertama adalah n^2, atau

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 .$$

Perlu diketahui bahwa tidak setiap pola bilangan dapat ditentukan rumus eksplisitnya. Sebagai contoh bilangan prima yaitu $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ yang tidak memiliki rumus eksplisitnya.

4. Barisan dan Deret

- **Barisan Bilangan (sekuens)**

Setiap pola yang diterapkan pada suatu himpunan bilangan akan membentuk suatu susunan bilangan yang memiliki pola. Barisan bilangan adalah suatu susunan bilangan yang memiliki pola tertentu sehingga membentuk suatu pola bilangan. Pola yang dimaksud, ditentukan dari hasil membandingkan dua bilangan yang berurutan pada susunan bilangan tersebut dan hasilnya adalah konstan.

Definisi

Barisan bilangan adalah suatu susunan bilangan yang hasil perbandingan dua suku bilangan yang berurutan adalah konstan

Contoh :

Berikut adalah suatu pola bilangan yang membentuk barisan bilangan

a. $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20$
b. $3, 6, 12, 24, 48, 96$

Terdapat dua jenis pola bilangan yang didapat dari hasil selisih atau hasil pembagian dari bilangan ke-n oleh bilangan ke-(n–1), untuk n bilangan asli. Jika suatu susunan bilangan yang selisih dua bilangan yang berurutan adalah konstan disebut barisan aritmetika. Sedangkan, jika pembagian dua bilangan yang berurutan adalah konstan maka susunan bilangan tersebut disebut barisan geometri. Seperti halnya pola bilangan, suatu barisan bilangan juga dapat diberi nama sesuai dengan karakter pola bilangan yang membentuk barisan itu.

Beberapa contoh barisan bilangan dan namanya, sebagai berikut :

Tabel 3. Barisan bilangan

No	Barisan Bilangan	Nama
1	1, 2, 3, 4, 5, …	Barisan bilangan Asli
2	1, 3, 5, 7, 9, …	Barisan bilangan Asli Ganjil
3	1, 4, 9, 16, 25, …	Barisan bilangan Persegi
4	1, 3, 6, 10, 15, …	Barisan bilangan Segitiga
5	2, 6, 12, 20, 30, …	Barisan bilangan Persegi Panjang

Berdasarkan tabel , didapat barisan 1, 2 adalah barisan aritmetika dan barisan 3 adalah barisan geometri. Sedangkan barisan 4, 5, 6 adalah barisan selain keduanya dan dibahas pada akhir modul ini. Pada penulisan suatu barisan, setiap bilangan yang membentuk barisan bilangan disebut suku barisan dan dinotasikan dengan ui, dengan i adalah indeks ke-i. Setiap dua suku barisan dipisahkan dengan notasi "," (koma). Indeks n pada un menunjukkan banyaknya suku dari barisan, sedangkan notasi un disebut suku umum barisan yang merupakan fungsi dengan daerah asalnya himpunan bilangan asli. Untuk n bilangan asli hingga maka barisan bilangannya disebut barisan bilangan hingga.

Secara umum, suatu barisan bilangan dapat disajikan dalam bentuk

$$u_1,\ u_2, u_3, \dots,\ u_n$$

dengan u_1 adalah suku ke-1, u_2 adalah suku ke-2, dan u_n adalah suku ke-n.

Contoh :

Tentukan rumus umum suku ke-n bagi barisan-barisan berikut ini, jika diketahui sebagai berikut:

a. $4, 6, 8, 10, \ldots$

b. $2, 4, 8, 16, \ldots$

c. $3, -3, 3, -3, \ldots$

Jawab:

a. Barisan $4,6,8,10, \ldots$; adalah barisan dengan suku pertama $u_1 = 4$ dan selisih suku yang berurutan bernilai konstan sama dengan 2. Jadi, $u_n = 2n + 2$.

b. Barisan $2, 4, 8, 16, \ldots$; dapat ditulis sebagai $(2)^1$, $(2)^2$, $(2)^3$, $(2)^4$,. . . ; barisan dengan suku-sukunya sama dengan 2 dipangkatkan bilangan asli. Jadi $u_n = 2^n$

c. Barisan $3, -3, 3, -3, \ldots$; barisan dengan suku pertama $u_1 = 3$ dan perbandingan dua suku berurutan bernilai konstan sama dengan –1. Jadi un = $-3(-1)^n$

Contoh :

Diberikan barisan bilangan yang rumus umum suku ke-n adalah $u_n = 7n - 4$. Tentukan suku pertama dan suku ke-10 dari barisan tersebut.

Jawab

Berdasarkan definisi, diketahui bahwa suku ke-n adalah un=7n– 4. Sehingga didapat suku pertama adalah u_1= 7 . 1 – 4 = 3 dan suku ke-10 adalah u_{10} = 7 . 10 – 4 = 66. Jadi, suku pertama dan suku ke-10 masing-masing adalah $u_1 = 3$ dan $u_{10} = 66$.

Contoh

Diberikan dua barisan yang masing-masing terdiri tiga suku yaitu a, b, c dan d, e, f dengan ketentuan sebagai berikut. Pada barisan pertama berlaku selisih dua suku berurutan adalah tetap, sedangkan barisan kedua berlaku hasil bagi suku berurutan adalah tetap. Jika diketahui b=7, c – a =10, e = b+3 dan f=2e maka tentukan kedua barisan dengan menerapkan sifat-sifat barisan bilangan. Jawab :

Berdasarkan hipotesis diperoleh bahwa barisan pertama adalah barisan aritmetika, yaitu a, b, c dengan b=7 dan c – a = 10 sehingga diperoleh selisihnya adalah 5 dan barisan adalah 2, 7, 12. Jika e = b+3 dan f = 2e maka diperoleh e=10 sehingga didapat barisan geometrinya adalah 5, 10, 20.

- **Barisan dan Deret Aritmetika**

  a. Barisan Aritmetika

  Bagi Anda yang pernah naik taksi yang menggunakan argometer, pernahkah Anda memperhatikan perubahan bilangan yang tercantum pada argometer? Apakah bilangan-bilangan itu berganti secara periodik dan apakah pergantiannya menuruti aturan tertentu? Jika Anda memperhatikan mulai dari awal bilangan yang tercantum pada argometer dan setiap perubahan yang terjadi, apa yang dapat Anda simpulkan dari barisan bilangan-bilangan tersebut?

  Iwan mencari rumah temannya di Jalan Gambir no.55. Setelah sampai di Jalan Gambir ia memperhatikan bahwa rumah-rumah yang terletak di sebelah kanan jalan adalah rumah-rumah dengan nomor urut genap 2, 4, 6, 8, dan seterusnya. Dengan memperhatikan keadaan itu, kearah manakah Iwan mencari rumah temannya?

  Perubahan bilangan-bilangan pada argometer taksi menuruti aturan tertentu. Setiap dua bilangan yang berurutan mempunyai selisih yang tetap. Barisan bilangan yang seperti itu disebut barisan aritmetika.

  Demikian juga barisan nomor-nomor rumah di atas merupakan barisan bilangan aritmetika. Barisan bilangan ini mempunyai selisih yang tetap antara dua suku yang berurutan. Pada barisan 1, 3, 5, 7, …, suku pertama adalah 1, suku kedua adalah 3, dan seterusnya. Selisih antara dua suku yang berurutan adalah 2. Barisan 2, 4, 6, 8, …, juga mempunyai selisih dua suku yang berurutan selalu tetap yang besarnya 2

b. Rumus suku Ke-n Barisan Aritmetika

Pada barisan aritmetika dengan bentuk umum u_1, u_2, u_3, … dengan u_1 adalah suku pertama, u_2 adalah suku ke-2, u_3 adalah suku ke-3 dan seterusnya. Selisih antara dua suku berurutan disebut juga beda dan diberi notasi b, sehingga $b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \cdots = u_n - u_{n-1}$. Misalkan suku pertama u_1 dinamakan a dan beda antara 2 suku berurutan adalah b, maka: $u_1 = a$

$u_2 - u_1 = b \Rightarrow u_2 = u_1 + b = a + b = a + (2 - 1)b$

$u_3 - u_2 = b \Rightarrow u_3 = u_2 + b = a + 2b = a + (3 - 1)\ b$

$u_4 - u_3 = b \Rightarrow u_4 = u_3 + b = a + 3b = a + (4 - 1)b$

$u_5 - u_4 = b \Rightarrow u_5 = u_4 + b = a + 4b = a + (5 - 1)\ b$

Dengan memperhatikan pola suku-suku di atas kita dapat menyimpulkan rumus umum suku ke –n adalah:

$u_n = a + (n - 1)\ b$

Dengan u_n = suku ke-n

a = suku pertama dan b = beda

Contoh

Tentukan suku ke-35 dari barisan 3, 7, 11, 15, ...

Jawab:

$u_1 = a = 3$, $b = u_2 - u_1 = 7 - 3 = 4$, $n = 35$

Dengan mensubstitusikan unsur-unsur yang diketahui ke

$u_n = a + (n - 1)b$ diperoleh $u_{35} = 3 + (35 - 1)4 = 139$ Jadi suku ke-35 adalah 139.

Contoh

i. Carilah rumus suku ke-n barisan 60, 56, 52, 48, ...
ii. Suku ke berapakah dari barisan di atas yang nilainya adalah 16?

Jawab:

$u_1 = a = 60$, $b = u_2 - u_1 = 56 - 60 = -4$

a) $u_n = a + (n - 1)b = 60 - 4(n - 1) = 64 - 4\ a$

b) $u_n = 64 - 4n$

$16 = 64 - 4n$

$4n = 48 \Leftrightarrow n = 12$

Contoh

Pada suatu barisan aritmetika suku ke-10 adalah 41 dan suku ke-5 adalah 21. Tentukan suku ke-125

Jawab:

$u_{10} = a + (10 - 1)b = a + 9b = 41$

$u_5 = a + (5 - 1)b = a + 4b = 21$

$5b = 20$

$b = 4 \Rightarrow a = 5$

$u_{125} = a + (125 - 1)4 = 5 + 124(4) = 501$

c. Deret Aritmetika

Tentu Anda sudah mengetahui cerita tentang matematikawan Gauss. Ketika masih di sekolah dasar ia diminta gurunya untuk menjumlahkan 100 bilangan asli yang pertama. Teknik menghitung Gauss kecil sederhana tetapi tidak diragukan lagi keefektifannya. Ia memisalkan S adalah jumlah 100 bilangan asli yang pertama seperti di bawah ini.

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$

Kemudian ia menulis penjumlahan itu dengan urutan suku-suku terbalik.

$S = 100 + 99 + 98 + 97 + \cdots + 1$

Selanjutnya ia menjumlahkan kedua deret.

$2S = 101 + 101 + 101 + 101 + \cdots + 101$

Karena banyak suku dalam deret itu ada 100, maka penjumlahan itu dapat juga ditulis sebagai: $2S = 100(101) = 10100 \Leftrightarrow S = 5050$

Teknik menghitung Gauss ini yang diikuti selanjutnya untuk mendapatkan rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika. Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku dari suatu barisan aritmetika. Dari barisan aritmetika $u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots$ diperoleh deret aritmetika $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$. Bila jumlah n suku yang pertama dari suatu deret aritmetika dinyatakan dengan Sn maka

$Sn = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n$

Misalkan $u_n = k$, maka

$Sn = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n$

$Sn = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \cdots + (k - b) + k$ … (1)

ika urutan penulisan suku-suku dibalik maka diperoleh

$Sn = k + (k - b) + (k - 2b) + (k - 3b) + \cdots + (a + b) + a$ … (2)

Dengan menjumlahkan persamaan (1) dan (2) didapat:

$2Sn = (a + k) + (a + k) + (a + k) + (a + k) + \cdots + (a + k) + (a + k)$

$= n(a + k) = n[2a + (n - 1)b]$

Jadi Sn = 1 2 $n(a + k)$

atau $\mathrm{Sn} = \frac{1}{2}\ \mathrm{n}(\mathrm{a} + \mathrm{un}) = \frac{1}{2}\ \mathrm{n}[(2\mathrm{a} + (\mathrm{n} - 1)\mathrm{b}]$

dengan a = suku pertama, un = suku ke-n, b = beda Jika ditulis dalam bentuk notasi sigma, jumlah n suku pertama deret aritmetika dinyatakan sebagai

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{n=1}^{n} a + (n-1)b$$

Dengan demikian jumlah n suku pertama dan n − 1 suku pertama deret aritmetika dapat dinyatakan sebagai

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}$$

Dengan mengurangkan Sn dengan S_{n-1} terlihat dengan jelas bahwa

$u_n = S_n - S_{n-1}$

Contoh

Seorang anak mengumpulkan batu kerikil dalam perjalanan pulang dari sekolah. Tiap hari ia mengumpulkan 5 kerikil lebih banyak dari hari sebelumnya. Jika pada hari pertama ia membawa pulang 1 kerikil, tentukan

a) jumlah kerikil-kerikil tersebut sampai hari ke-n dan bentuk notasi sigma jumlah tersebut
b) rumus jumlah deret tersebut
c) jumlah kerikil pada hari ke-25

Jawab

a) $1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n}(5k - 4)$

b) $Sn = \frac{1}{2}\ n[(2a\ +\ (n\ -\ 1)b]$

$= \frac{1}{2}\ n[(2\ +\ (n - 1)5] = \frac{5}{2} n^2 - \frac{3}{2}\ n$

c) $S_{25}\ = \frac{5}{2}(25)^2\ - \frac{3}{2}\ (25)\ =\ 1525$

Banyak batu kerikil yang dikumpulkan pada hari ke-25 adalah 1525 buah.

Contoh

Hitunglah jumlah bilangan asli antara 10 sampai 100 yang habis dibagi 6

Jawab:

Jumlah bilangan asli antara 10 sampai 100 yang habis dibagi 6 adalah deret 12 + 18 + 24 + 30 +…+ 96

u_n = 96 disubstitusikan ke $u_n = a + (n - 1)b$

Jadi 96 = 12 + $(n - 1)6$. Dengan menyelesaikan persamaan ini didapat n = 15 Selanjutnya n = 15 dan u_n = 96 disubstitusikan ke $S_n = \frac{1}{2}\ n(a\ +\ u_n)$ sehingga: $Sn\ = \frac{1}{2}\ (15)(12\ +\ 96)\ =\ 810$

Jadi jumlah bilangan asli antara 10 sampai 100 yang habis dibagi 6 adalah 810.

Contoh

Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika ditentukan oleh rumus $S_n = 2n^2 + 5n$. Tentukan suku ke-n.

Jawab:

$U_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 + 5n - \{2(n - 1)^2 + 5n\} = 4n + 2$

Jadi rumus suku ke-n adalah $U_n = 4n + 2$

- **Barisan dan Deret Geometri**

  a. Barisan Geometri

  Alkisah di negeri Antah Berantah seorang raja akan memberikan hadiah kepada Abu, juara catur di negeri itu. Ketika raja bertanya hadiah apa yang diinginkan oleh Abu, sang juara, menjawab bahwa dia menginginkan hadiah beras yang merupakan jumlah banyak beras di petak terakhir papan catur yang diperoleh dari kelipatan beras 1 butir di petak pertama, 2 butir di petak kedua, 4 butir dipetak ketiga, dan seterusnya. Raja yang mendengar permintaan itu langsung menyetujui karena Raja berpikir bahwa hadiah yang diminta itu begitu sederhana.

Apakah memang hadiah itu begitu sederhana dan berapa butir beras sesungguhnya jumlah hadiah Abu? Jika dianalisa, hadiah yang diperoleh Abu tergantung kepada banyak petak dipapan catur.

Petak	1	2	3	4	5	…	n	…	64
Beras (butir)	1	2	4	8	16		…		…

Perhatikan bahwa barisan 1, 2, 4, 8 , 16, … mempunyai perbandingan yang tetap antara dua suku berurutan. Perbandingan yang tetap itu disebut rasio dan dilambangkan dengan r. Pada barisan ini perbandingan dua suku yang berurutan adalah $r = 2$. Barisan yang mempunyai perbandingan yang tetap antara dua suku berurutan disebut **barisan geometri**. Secara umum dapat dikatakan:

Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_{n-1}, u_n$ disebut barisan geometri jika $\frac{un}{un-1}$ = konstan = r

b. Rumus Suku Ke-n Barisan Geometri

Jika suku pertama $u_1 = a$ dan perbandingan dua suku yang berurutan disebut rasio r, maka

$\frac{u_2}{u_1} = r \Leftrightarrow u_2 = u_1 r = ar$

$\frac{u_3}{u_2} = r \Leftrightarrow u_3 = u_2 r = ar^2$

$\frac{u_4}{u_3} = r \Leftrightarrow u_4 = u_3 r = ar^3$

Dengan memperhatikan pola suku-suku di atas diperoleh rumus umum suku ke-n barisan geometri

$$u_n = ar^{n-1}$$

dengan u_n $adalah$ suku ke-n, a adalah suku pertama, r adalah rasio

Contoh

Suku ketiga dan suku kelima suatu barisan geometri berturut-turut 27 dan 3. Jika rasio barisan ini bilangan positif, tentukan:

1) rasio dan suku pertama
2) rumus suku ke-n dan suku ke-8

Jawab

1) $\frac{u_5}{u_3} = \frac{ar^4}{ar^2} = \frac{3}{27} \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \mathrm{r} = \frac{1}{3}$

$ar^2 = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{9}a = 27 \Leftrightarrow \mathrm{a} = 243$

Jadi rasio deret itu $r = \frac{1}{3}$ dan suku pertama a = 243

2) $u_n = ar^{n-1}$

$= 243\ (\frac{1}{3})^{n-1} = 3^5\ (3^{-1})^{\ n-1} = 3^{6-n}$

$u_8 = 3^{6-8} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

Rumus suku ke-n adalah $u_n = 3^{6-n}$ dan suku ke-8 adalah $\frac{1}{9}$

Contoh

Tiga bilangan membentuk barisan geometri yang hasil kalinya 1000. Jika jumlah tiga bilangan itu 35, tentukan bilangan-bilangan tersebut.

Jawab:

Tiga bilangan itu dimisalkan sebagai $\frac{p}{r}$, p, pr. Hasil kali tiga bilangan itu p^3 = 1000 ⇔ p = 10.

Jumlah tiga bilangan $\frac{p}{r}$ + p + pr = 35

$\Leftrightarrow \frac{10}{r} + 10 + 10r = 35$

⇔ $10r^2 - 25r + 10 = 0$

⇔ $2r^2 - 5r + 2 = 0$

⇔ $(2r - 1)(r - 2) = 0$

$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\ atau\ r = 2$

Untuk $r = \frac{1}{2}$ dan p = 10 barisan adalah 20, 10, 5

Untuk r = 2 dan p = 10 barisan adalah 5,10,20

c. Deret Geometri

Banyak orang di sekitar kita yang bekerja dalam bisnis Multi Level Marketing (MLM). Seseorang yang membangun suatu bisnis MLM mengembangkan bisnisnya dengan mencari 2 agen di bawahnya yang memasarkan produk. Masing-masing agen itu juga mencari 2 agen lagi dan seterusnya. Keuntungan yang diperoleh oleh orang pertama sangat tergantung dari kerja para agen di bawahnya untuk memasarkan produk MLM itu. Semakin banyak orang yang terlibat untuk memasarkan produk itu akan menambah banyak pendapatan dari orang pertama. Perhatikan bahwa banyak orang yang terlibat dalam bisnis itu adalah 1 + 2 + 4 + 8 + …

Jumlahkan 1 + 2 + 4 + 8 + … merupakan salah satu contoh deret geometri. Jika n suku pertama barisan geometri u_1, u_2, u_3, u_4, … , u_n dijumlahkan maka diperoleh deret geometri

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} ar^{n-1}$$

Rumus umum jumlah n suku deret geometri dapat ditentukan sebagai berikut:

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n$

$= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$ .... (1)

Masing-masing ruas pada persamaan (1) dikalikan dengan r sehingga didapat

$rS_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$ …………(2)

Kurangkan persamaan (1) dengan persamaan (2), diperoleh

$S_n - rS_n = a - ar^n$

$\Leftrightarrow Sn\ (1 - r) = a(1 - r^n)$

$\Leftrightarrow Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$ atau $Sn = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$,dengan $r \neq 1$

Contoh

Tentukan jumlah 5 suku pertama deret 32 + 16 + 8 + 4+. ..

Jawab

a = 32, $r = \frac{1}{2}$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{32\left[1-(\frac{1}{2})^5\right]}{(1-\frac{1}{2})} = 62$

Jadi jumlah 5 suku pertama deret tersebut adalah 62

Contoh

Tentukan nilai n jika $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 510$

Jawab :

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = 510$$

$a = 2, r = 2$

$Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$

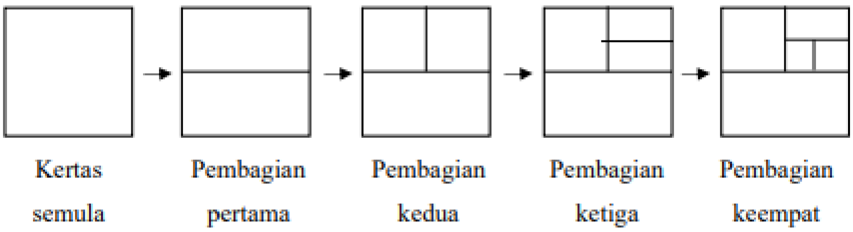
$$\Rightarrow 510 = \frac{2(2^n - 1)}{(2-1)} = 2^{n+1} - 2$$

$\Leftrightarrow$ 512 = 2 $^{n+1}$

$\Leftrightarrow$ n = 8

d. Deret Geometri Tak Hingga

Untuk membahas masalah deret geometri tak hingga dapat digunakan benda yang sudah dikenal siswa. Sebuah kertas yang berbentuk persegi dibagi menjadi dua bagian. Salah satu bagian kertas itu kemudian dibagi lagi menjadi dua bagian. Selanjutnya bagian terkecil dari kertas itu dibagi lagi menjadi dua bagian dan seterusnya seperti digambarkan di bawah ini:



Secara teoritis proses pembagian ini dapat diulangi terus menerus sampai tak berhingga kali. Pada pembagian yang pertama diperoleh $\frac{1}{2}$ bagian, yang ke-2 diperoleh $\frac{1}{4}$ bagian, yang ke-3 diperoleh $\frac{1}{8}$ bagian dan seterusnya sampai tak berhingga kali.

Tampak jelas bahwa jumlah dari seluruh hasil pembahian sampai tak berhingga kali adalah:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$

Proses tadi menjelaskan jumlah deret geometri tak hingga yang bisa diperagakan secara sederhana.untuk penjelasan secara teoritis perhatikan jumlah n suku pertama deret geometri $Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$. Jika suku-suku deret itu bertambah terus maka deret akan menjadi deret geometri tak hingga. Dengan demikian jumlah deret geometri tak hingga menjadi

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{a}{(1-r)} - \lim_{n \to \infty} \frac{a}{(1-r)} r^n$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{a}{(1-r)} - \lim_{n \to \infty} \frac{a}{(1-r)} r^n$

$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim\limits_{n \to \infty} r^n$

Terlihat jelas bahwa nilai S_n sangat dipengaruhi oleh nilai $\lim\limits_{n \to \infty} r^n$. Jika

1) $-1 < r < 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} r^n$ akan menjadi nol sehingga deret tak hingga itu mempunyai jumlah

   $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

   Deret geometri tak hingga yang mempunyai jumlah disebut konvergen atau mempunyai limit jumlah.

2) $r < -1 \; atau \; r > 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = \pm\infty$ sehingga deret tak hingga itu tidak mempunyai limit jumlah. Deret yang seperti ini disebut divergen.

Contoh

Hitunglah jumlah deret geometri tak hingga $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \cdots$

Jawab

$a = 4$ dan $r = -\frac{1}{2}$

$$S_\infty = \frac{a}{(1-r)} = \frac{4}{\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{3}$$

Jadi jumlah deret geometri tak hingga itu adalah $\frac{8}{3}$

- **Barisan sebagai Fungsi**

  Untuk menentukan suku-suku suatu barisan kita melihat keteraturan pola dari sukusuku sebelumnya. Salah satu cara untuk menentukan rumus umum suku ke-n suatu barisan adalah dengan memperhatikan selisih antara dua suku yang berurutan. Bila pada satu tingkat pengerjaan belum diperoleh selisih tetap, maka pengerjaan dilakukan pada tingkat berikutnya sampai diperoleh selisih tetap. Suatu barisan disebut berderajat satu (linear) bila selisih tetap diperoleh dalam satu tingkat pengerjaan, disebut berderajat dua bila selisih tetap diperoleh dalam dua tingkat pengerjaan dan seterusnya. Bentuk umum dari barisan-barisan itu merupakan fungsi dalam n sebagai berikut

  Selisih tetap 1 tingkat $U_n = an + b$

  Selisih tetap 2 tingkat $U_n = an^2 + bn + c$

  Selisih tetap 3 tingkat $U_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

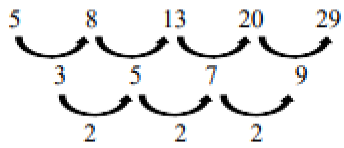
  Perlu diperhatikan bahwa a dan b pada fungsi ini tidak sama dengan a = suku pertama dan b = beda pada suku-suku barisan aritmetika yang dibicarakan sebelumnya. Untuk memahami pengertian barisan berderajat satu, berderajat dua, dan seterusnya perhatikan contoh berikut:

  1) Barisan 2, 5, 8, 11, … disebut barisan berderajat satu karena selisih tetap diperoleh pada satu tingkat penyelidikan.

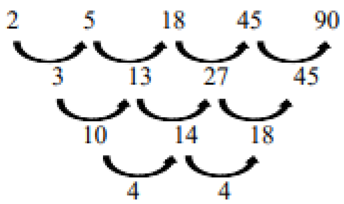
  selisih tetap = 3

2) Barisan 5, 8, 13, 20, 29, … disebut barisan berderajat dua karena selisih tetap diperoleh pada dua tingkat penyelidikan.



selisih tetap = 3

3) Barisan 2, 5, 18, 45, 90, … disebut barisan berderajat tiga karena selisih tetap diperoleh pada tiga tingkat penyelidikan.

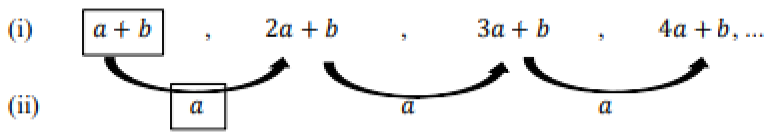


Selisih tetap = 4

Untuk menentukan rumus suku ke-n masing-masing barisan itu dilakukan dengan cara sebagai berikut:

a. Barisan Linear (Berderajat Satu)

Bentuk umum $U_n = an + b$, jadi $u_1 = a + b$, $u_2 = 2a + b$, $u_3 = 3a + b$, $u_4 = 4a + b$,dan seterusnya.



Rumus umum suku ke-n barisan 2, 5, 8, 11, ... dapat ditentukan dengan cara:

Selisih tetap = 3

(ii) $a = 3 \rightarrow$ (i) $a + b = 2$

b. Barisan Berderajat Dua

Bentuk umum $Un = an^2 + bn + c$. Dengan demikian $u_1 = a + b + c$, $u_2 = 4a + 2b + c$, $u_3 = 9a + 3b + c$, $u_4 = 16a + 4b + c$, dan seterusnya. Identifikasi selisih tetapnya adalah sebagai berikut:

(i) $\boxed{a+b+c}$, $4a+2b+c$, $9a+3b+c$, $16a+4b+c, \dots$

(ii) $\boxed{3a+b}$ $5a+b$ $7a+b$

(iii) $\boxed{2a}$ $2a$

Rumus umum suku ke-n barisan 5, 8, 13, 20, 29, … dapat ditentukan dengan cara:

(i) 5 8 13 20 29

(ii) 3 5 7 9

(iii) 2 2 2

Selisih tetap = 2

(iii) $2a = 2$

$a = 1 \rightarrow (ii) 3a + b = 3$

$b = 0 \rightarrow (i) a + b + c = 5$

$c = 4$, sehingga $U_n = n^2 + 4$

c. Barisan Berderajat Tiga

Bentuk umum $Un = an^3 + bn^2 + cn + d$. Dengan demikian $u_1 = a + b + c + d$, $u_2 = 8a + 4b + 2c + d$, $u_3 = 27a + 9b + 3c + d$, $u_4 = 64a + 16b + 4c + d$ dan seterusnya. Identifikasi selisih tetapnya adalah sebagai berikut.

(i) $\boxed{a+b+c+d,}$ $8a+4b+2c+d$, $27a+9b+3c+d$, $64a+16b+4c+d$

(ii) $\boxed{7a+3b+c}$ $19a+5b+c$ $37a+7b+c$

(iii) $\boxed{12a+2b}$ $18a+2b$

(iv) $\boxed{6a}$

Rumus umum suku ke-n barisan 2, 5, 18, 45, 90, … dapat ditentukan dengan cara:

(i) 2 5 18 45 90

(ii) 3 13 27 45

(iii) 10 14 18

(iv) 4 4

Dengan menyelesaikan persamaan (iv), (iii), (ii) dan (i) seperti yang dilakukan pada barisan berderajat satu maupun barisan berderajat dua diperoleh

$a = \frac{2}{3}$, $b = 1, c = -\frac{14}{3}$, dan d = 5

sehingga rumus suku ke-n adalah

$Un = \frac{2}{3} n^3 + n^2 - \frac{14}{3} n + 5 = \frac{1}{3} (2n^3 + 3n^2 - 14n + 15)$

- **Barisan Fibonacci**

Barisan Fibonacci adalah barisan rekursif (pemanggilan ulang/ pengulangan) yang ditemukan oleh seorang matematikawan berkebangsaan Italia yang bernama Leonardo da Pisa.

Barisan ini berbentuk sebagai berikut:

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,10946, …

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_3 = F_1 + F_2 = 2$$
$$F_4 = F_2 + F_3 = 3$$
$$F_5 = F_3 + F_4 = 8, \dots.$$

Jika diperhatikan, bahwa suku ke-n merupakan penjumlahan dua suku sebelumnya untuk n ≥ 2. Jadi barisan ini didefinisikan secara rekursif sebagai berikut

$$F_n = \begin{cases} 0, jika\ n = 0 \\ 1, jika\ n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}\ untuk\ lainnya \end{cases}$$

Berbagai fenomena alam memiliki aturan seperti barisan Fibonacci ini. Fenomena tersebut antara lain:

1) Bunga Matahari

Gambar 4. Bunga Matahari

(Sumber: https://digiyan.com/bunga-matahari/)

Biji bunga matahari dari titik tengah (*center*) kemudian biji matahari pada lingkaran terluar terdekat selanjutnya, kemudian pada lingkaran luar selanjutnya dan samapi pada bji bunga pada lingkaran terluar bunga matahari mengikuti barisan Fibonacci.

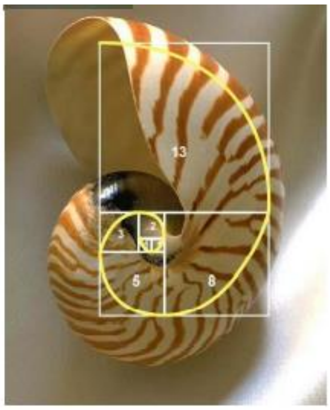
2) Mahkota Bunga

Gambar 5. Mahkota Bunga

(Sumber: https://assets.kompasiana.com/statics/files/1418367076183014337- 7.png?t=o&v=700?t=o&v=350)

Mahkota bunga pada gambar di atas memenuhi barisan Fibonacci, (a) bunga Lili putih dengan banyak mahkota bunga 1, (b) bunga Euphorbia dengan banyak mahkota bunga 2, (c) bunga Trilium dengan banyak mahkota bunga 3, (d) bunga Columbine dengan banyak mahkota bunga 5, (e) bunga Bloodroot dengan banyak mahkota bunga 8, (f) bunga Blak-eye Susan dengan banyak mahkota bunga 13, dan (g) bunga Shasta daisy dengan banyak mahkota bunga 21.

3) Cangkang Kerang



Gambar 6. Cangkang Kerang

(Sumber: https://maths.id/asal-usul-barisan-fibonacci.php)

Pola bilangan pada cangkang kerang seperti gambar di atas menunjukkan pola barisan fibonacci.

- **Golden Ratio**

  Golden ratio atau rasio emas ($\varphi = 1.618205\ldots$) merupakan suatu nilai rasio (*ratio numbe*r) konvergen yang diperoleh apabila suku-suku di atas dua belas pada barisan fibonacci dibagi dengan satu suku sebelumnya. Dalam barisan Fibonacci, F_{12} bernilai 89, F_{13} bernilai 144, F_{14} bernilai 233, dan F_{15} bernilai 377. Apabila dilakukan perhitungan dengan cara membagi suatu suku dalam deret Fibonacci dengan suku sebelumnya, maka akan diperoleh suatu bilangan yang menuju ke arah Golden Ratio atau Rasio Emas ($\varphi = 1.618$). Pehitungannya sebagai berikut.

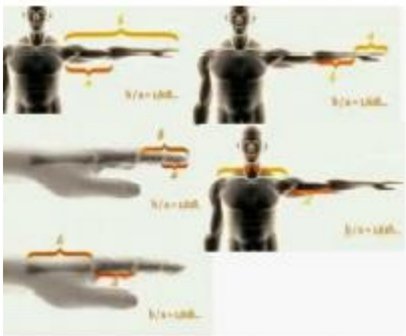
$$\frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{144}{89} \approx 1{,}617977$$

$$\frac{f_{14}}{f_{13}} = \frac{233}{144} \approx 1{,}6180556$$

$$\frac{f_{15}}{f_{14}} = \frac{377}{233} \approx 1{,}6180258$$

dst

Adapun contoh *golden ratio* ada pada tubuh manusia yang dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 7. Goldn Ratio

(Sumber: https://www.biologiedukasi.com/2014/08/the-golden-ratio-sebuah-kesempurnaan.html)

Pada tangan manusia, diyakini bahawa perbandingan panjang antara ujung tangan ke siku dengan siku kepangkal tangan menghasilkan ratio. Begitu juga dengan rasio pembagian atas panjang pangkal telapak tangan ke siku dengan ujung telapak tangan ke pangkal telapak tangan, perbandingan antara panjang tangan manusia dengan panjang dari siku ke pangkal tangan turut menghasilkan *golden ratio.*

5. Kekongruenan dan Modulo

- **Kekongruenan**

Definisi 2.1

Jika m suatu bilangan bulat positif membagi $a - b$ maka dikatakan a kongruen terhadap b modulo m dan ditulis $a \equiv b\ (mod\ m)$. Jika m tidak membagi $a - b$ maka dikatakan a tidak kongruen terhadap b modulo b dan ditulis $a \not\equiv b\ (mod\ m)$. Jika $m > 0$ dan $m|(a - b)$ maka ada suatu bilangan bulat k sehingga $a - b = mk$. Dengan demikian $a \equiv b\ (mod\ m)$ dapat dinyatakan sebagai $a - b = mk$, ataubeda diantara a dan b merupakan kelipatan m. Atau $a = b + mk$, yaitu a sama dengan b ditambah kelipatan m.

Contoh 2.1

1) $10 \equiv 5\ (mod\ 5)$

Jelas menurut definisi 10 − 5 = 5.1, sehingga 10 kongruen terhadap 5 modulo 5.

2) $8 \not\equiv 3\ (mod\ 2)$ Menurut definisi 8 − 3 ≠ 2. k, sehingga 8 tidak kongruen dengan 3 modulo 2

Teorema 2.1

Untuk bilangan bulat sebarang a dan b, $a \equiv b\ (mod\ m)$ jika dan hanya jika a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi m.

Teorema 2.2

Kekongruenan sebagai relasi ekivalen. Untuk m bilangan bulat positif dan p, q, dan r bilangan bulat, berlaku

1) Sifat Refleksif $p \equiv p\ (mod\ m)$
2) Sifat Simetris $p \equiv q\ (mod\ m)$ jika dan hanya jika $q \equiv p\ (mod\ m)$
3) Sifat Transitif Jika $p \equiv q\ (mod\ m)$ dan $q \equiv r\ (mod\ m)$ maka $p \equiv r\ (mod\ m)$

Contoh 2.2

1) $5 \equiv 5(mod\ 7)$ dan $-10 \equiv -10(mod\ 15)$ sebab $7 \mid 5 - 5\ dan\ 15 \mid -10 - (-10)$
2) $27 \equiv 6(mod\ 7)$ akibatnya $6 \equiv 27(mod\ 7)$ sebab $7 \mid 6 - 27$ atau $7 \mid (-21)$
3) $45 \equiv 21(mod\ 3)$ dan $21 \equiv 9(mod\ 3)$, maka $45 \equiv 9(mod\ 3)$ sebab $3 \mid 45 - 9\ atau\ 3 \mid 36$

Teorema 2.3

Jika p, q, r, dan m adalah bilangan-bilangan bulat dan $m > 0$ sedemikian hingga $p \equiv q(mod\ m)$, maka:

1) $p + r \equiv q + r(mod\ m)$
2) $p - r \equiv q - r(mod\ m)$
3) $pr \equiv qr(mod\ m)$

Contoh 2.3

1) $43 \mid 7(mod\ 6)$, maka $43 + 5 \mid 7 + 5(mod\ 6)$ atau $48 \mid 12(mod\ 6)$
2) $27 \mid 6(mod\ 7)$, maka $27 - 4 \mid 6 - 4(mod\ 7)$ atau $23 \mid 2(mod\ 7)$
3) $35 \mid 3(mod\ 8)$, maka $35.4 \mid 3.4(mod\ 8)$ atau $140 \mid 12(mod\ 8)$

Contoh 2.4

Perhatikan bahwa teorema 2.3(3) tidak bisa dibalik, artinya jika $pr \equiv qr(mod\ m)$, maka belum tentu bahwa $p \equiv q(mod\ m)$, misalnya $24 = 4.6$, $12 = 4.3$, dan $24 \equiv 12(mod\ 6)$ atau $4.6 \equiv 4.3(mod\ 6)$, tetapi $6 \equiv 3(mod\ 6)$.

Teorema 2.4

Jika $a \equiv b\ (mod\ m)$ dan $c \equiv d\ (mod\ m)$ maka

1) $a + c \equiv b + d\ (mod\ m)$
2) $a - c \equiv b - d\ (mod\ m)$
3) $ac \equiv bd\ (mod\ m)$

Contoh 2.5

1) $36 \equiv 8(mod\ 7)$ dan $53 \equiv 4(mod\ 7)$, maka $36 + 53 \equiv 8 + 4(mod\ 7)$ atau $89 \equiv 12(mod\ 7)$
2) $72 \equiv 7(mod\ 5)$ dan $43 \equiv 3(mod\ 5)$, maka $72 - 43 \equiv 7 - 3(mod\ 5)$ atau $29 \equiv 4(mod\ 5)$
3) $15 \equiv 3(mod\ 4)$ dan $23 \equiv 7(mod\ 4)$ maka $15.23 \equiv 3.7(mod\ 4)$ atau $345 \equiv 21(mod\ 4)$

Teorema 2.5

Jika $a \equiv b\ (mod\ m)$ dan $c \equiv d\ (mod\ m)$ maka $ax + cy \equiv bx + dy\ (mod\ m)$

Teorema 2.6

Jika $p \equiv pq(mod\ m)$ maka $pr \equiv qr\ (mod\ mr)$.

Teorema 2.7

Jika $a \equiv b\ (mod\ m)$ maka $a^n \equiv b^n\ (mod\ m)$ untuk n bilangan bulat positif.

Teorema 2.8

Misalkan f suatu polinom dengan koefisien bilangan bulat, yaitu $f(x) = d_0\, x^n + d_1\, x^{n-1} + \ d_2\, x^{n-2} + \cdots . + d_{n-1}\, x + dn$ Dengan d_0, d_1, … , dn masing-masing bilangan bulat. Jika $a \equiv b$ $(mod\ m)$ maka $f(a) \equiv f(b)(mod\ m)$.

Teorema 2.9

Jika a suatu solusi $f(x)\ \equiv\ 0(mod\ m)$ dan $a\ \equiv\ b\ (mod\ m)$ maka b juga solusi $f(x)$ itu.

Contoh 2.6

Pandang $b\ =\ a_m\, 10^m +\ a_{m-1}\, 10^{m-1} + \cdots . + a_1\, 10 + a_n$ sebagai perluasan desimal bilangan bulat positif b dengan ak bilangan bulat dengan $0\ \leq\ ak\ <\ 10, k\ =\ 0,1,2, \ldots\ , m\ -\ 1, m$.

Misalkan $a_m\ +\ a_{m-1}\ +\ \cdots\ +\ a_1\ +\ a_0\ =\ s$. Maka 3|$b$ jika dan hanya jika 3|s. Perhatikan bahwa 10 ≡ 1 (mod 3). Maka menurut Teorema 8, $f(10)\ \equiv\ f(1)(mod\ 3)$.

Jika $b\ =\ f(10), maka\ \ a_m\, 10^m +\ a_{m-1}\, 10^{m-1} + \cdots . + a_1\, 10 + a_0 \equiv\ a_m\, 10^m + a_{m-1}\, 10^{m-1} + \cdots . + a_1\, 10 + a_n (mod\ 3)$ atau $f(10)\ \equiv\ f(1)(mod\ 3)$

Tetapi $a_m\ +\ a_{m-1}\ + \cdots . + a_1\ + a_0\ =\ s, sehingga\ b\ \equiv\ s(mod\ 3), atau\ b\ -\ s\ =\ 3h, h$ bilangan bulat.

Jika $3|b$ atau $b\ =\ 3r$, maka $3r\ -\ s\ =\ 3h, 3(r\ -\ h)\ =\ s$ atau $3|s$. Sebaliknya jika $3|s$ atau $s\ =\ 3u$ maka $b\ -\ 3u\ =\ 3h$ atau $b\ =\ 3(h\ -\ u)$ atau $3|b$. Maka $3|b$ jika dan hanya jika $3|s$. Dengan ungkapan lain, suatu bilangan bulat positif b akan terbagi 3 jika dan hanya jika haisl penjumlahan semua angka-angka bilangan itu terbagi 3. Sebagai misal 112764531 habis dibagi 3 karena $1\ +\ 1\ +\ 2\ +\ 7\ +\ 6\ +\ 4\ +\ 5\ +\ 3\ +\ 1\ =\ 30$ habis dibagi 3. Bilangan 112764532 dapat ditunjukkan tidak terbagi tiga karena memberikan sisa $r, 0\ \leq\ r\ <\ 3$. Dua buah bilangan bulat a dan b yang kongruen modulo m mungkin dapat juga kongruen modulo suatu bilangan bulat lain. Misalkan d > 0 dan d pembagi $m\ dan\ a\ \equiv\ b\ (mod\ m)$. Maka $m\ =\ kd$ dan $a\ -\ b\ =\ pm$ sehingga $a\ -\ b\ =\ p(kd)\ =\ (pk)d$ atau d pembagi $a - b$.

Teorema 2.10

Jika $d|m$ dan $a \equiv b(mod\ m)$ maka $a \equiv b\ (mod\ d)$

Teorema 2.11

Misalkan $(a, m) = d\ ax = ay\ (mod\ m)$ jika dan hanya jika $x \equiv y\ (mod\ \frac{m}{d}\ )$

Teorema 2.12

Misalkan $(a, m) = 1$.

$ax \equiv ay\ (mod\ m)$ jika dan hanya jika $x \equiv y\ (mod\ m)$

Teorema 2.13

Jika $ax \equiv ay\ (mod\ p)$ dengan $p \nmid a$ dan p bilangan basit, maka $x \equiv y\ (mod\ p)$

Teorema 2.14

Diketahui bilangan-bilangan bulat a, p, q, m, dan $m > 0$.

1) $ap \equiv aq(mod\ m)$ jika dan hanya jika $p \equiv q\ (mod\ \frac{m}{a,m}\ )$
2) $p \equiv q(mod\ m1)$ dan $p \equiv q(mod\ m2)$ jika dan hanya jika $p \equiv q(mod[m1, m2\ ])$

Contoh 2.7

1) $8p \equiv 8q(mod\ 6)$ dan $(8,6) = 2$, maka $p \equiv q(mod \frac{6}{2})$ atau $p \equiv q(mod\ 3)$
2) $12p \equiv 12q(mod\ 16)$ dan $(12,16) = 4$, maka $p \equiv q(mod \frac{16}{4}\ )$ atau $p \equiv q(mod\ 4)$

Contoh 2.8

1) $p \equiv q(mod\ 6) dan\ p \equiv q(mod\ 8), maka\ p \equiv q(mod\ [6,8]) atau$
   $p \equiv q(mod\ 24)$
2) $p \equiv q(mod\ 16) dan\ p \equiv q(mod\ 24), maka\ p \equiv q(mod\ [16,24]) atau$
   $p \equiv q(mod\ 48)$

- **Sistem Residu**

  Definisi 2.2

  Suatu himpunan $\{x, x, \dots, x\}$ disebut suatu sistem residu lengkap modulo m. Jika dan hanya jika untuk setiap y dengan $0 \leq y < m$, ada satu dan hanya satu x dengan $1 \leq i < m$, sedemikian hingga $y \equiv x(mod\ m)\ atau\ x \equiv y(mod\ m)$.

  Contoh 2.9

1) Himpunan $A = \{6, 7, 8, 9\}$ bukan merupakan sistem residu lengkap modulo 5 sebab banyaknya unsur A kurang dari 5.
2) Himpunan $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo 5 sebab untuk setiap y dengan dengan $0 \leq y < 5$, ada satu dan hanya satu x dengan $1 \leq i < 5$ sedemikian hingga $y \equiv x(mod\ 5)\ atau\ x \equiv y(mod\ 5)$.

   Nilai-nilai y yang memenuhi $0 \leq y < 5$, adalah $y = 0, y = 1, y = 2, y = 3, y = 4, atau\ y = 5$. Jika kita selidiki, maka kita peroleh bahwa:

   $10 \equiv 0(mod\ 5)$ $8 \equiv 3(mod\ m)$ $6 \equiv 1(mod\ m)$
   $9 \equiv 4(mod\ 5)$ $7 \equiv 2(mod\ m)$

   Dengan demikian untuk setiap y dengan $y = 0, 2, 3, 4, 5$, ada satu dan hanya satu x dengan $x = 6, 7, 8, 9, 10$, sedemikian hingga $x \equiv y(mod\ m)$. Jadi A adalah suatu sistem residu lengkap modulo 5.
3) Himpunan $B = \{4, 25, 82, 107\}$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo 4 sebab untuk setiap y dengan $0 \leq y < 4$, ada satu dan hanya satu x dengan $1 \leq i < 4$ sedemikian hingga
   $y \equiv x(mod\ 4)$ atau $x \equiv y(mod\ 4)$.
   4 ≡ 0$(mod\ 4)$ $82 \equiv 2(mod\ 4)$
   $25 \equiv 1(mod\ 4)$ $107 \equiv 3(mod\ 4)$
4) Himpunan $C = \{-33, -13, 14, 59, 32, 48, 12\}$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo 7 sebab untuk setiap y dengan $0 \leq y < 3$, ada lebih dari satu x dengan dengan $1 \leq i < 7$ sedemikian hingga $ay \equiv x(mod\ 7)$ atau $x \equiv y(mod\ 7)$.
   $-33 \equiv 0(mod\ 7)$ $59 \equiv 3(mod\ 7)$ $48 \equiv 1(mod\ 7)$
   $-13 \equiv 0(mod\ 7)$, $32 \equiv 3(mod\ 7)$ $12 \equiv 1(mod\ 7)$
   $14 \equiv 0(mod\ 7)$
5) Himpunan $D = \{10, -5, 27\}$ adalah bukan suatu sistem residu lengkap modulo 3 sebab untuk suatu y = 1 dengan $0 \leq y < 3$, ada lebih dari satu x (yaitu 10 dan −5) sehingga $10 \equiv 1(mod\ 3)\ -5 \equiv 1(mod\ 3)$

6) Algoritma pembagian menunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat $0,1, \dots, m-1$ merupakan suatu sistem residu lengkap modulo m, dan disebut sebagai residu non-negatif terkecil modulo m.

Definisi 2.3

Suatu himpunan bilangan bulat $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ disebut suatu sistem residu tereduksi modulo m jika dan hanya jika:

i. $(xi, m) = 1, 1 \leq i < k$

ii. $xi \equiv xj (mod\ m)$ untuk setiap $i \neq j$

iii. Jika $(y, m) = 1$, maka $y \equiv xi (mod\ m)$ untuk suatu $i = 1, 2, \dots, k$

Contoh 2.10

1) Himpunan {1,5} adalah suatu sistem residu tereduksi modulo 6 sebab:
   a) $(1,6) = 1\ dan\ (5,6) = 1$
   b) $5 \equiv 1 (mod\ 6)$
2) Himpunan {17, 91} adalah suatu sistem residu tereduksi modulo 6 sebab:
   a) $(17,6) = 1\ dan\ (91, 1, 6) = 1$
   b) $91 \equiv 17 (mod\ 6)$

Contoh 2.11

1) Himpunan $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo 8. Unsur-unsur A yang tidak relatif prima dengan 8 adalah 0, 2, 4, dan 6 karena $(0,8) = 8 \neq 1, (2,8) = 2 \neq 1, (4,8) = 4 \neq 1, dan\ (6,8) = 2 \neq 1$. Misalkan B adalah himpunan dari unsur-unsur yang tertinggal, maka $B = \{1, 3, 5, 7\}$, dan B merupakan suatu sistem residu tereduksi modulo 8 karena memenuhi definisi 2.2 2.
2) Himpunan A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19} adalah suatu sistem residu lengkap modulo 20. Jika unsur-unsur A yang tidak relatif prima dengan 20 dibuang, yaitu 0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, dan 18, maka unsur-unsur yang tertinggal adalah 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, dan 19, dan

B = {1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19} merupakan suatu sistem residu tereduksi modulo 20

Definisi 2.4

Ditentukan m adalah suatu bilangan bulat positif. Banyaknya residu di dalam suatu sistem residu tereduksi modulo m disebut fungsi ϕ-Euler dari m, dan dinyatakan dengan $\phi(m)$.

Contoh 2.12

$\phi(2) = 1$, diperoleh dari unsur 1
$\phi(3) = 2$, diperoleh dari unsur-unsur 1 dan 2
$\phi(4) = 2$, diperoleh dari unsur-unsur 1 dan 3
$\phi(5) = 4$, diperoleh dari unsur-unsur 1, 2, 3, dan 4
$\phi(16) = 8$, diperoleh dari unsur-unsur 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, dan 15
$\phi(27) = 18$, diperoleh dari unsur-unsur 1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, dan 26
$\phi(p) = p-1$ jika p adalah suatu bilangan prima

Teorema 2.15

Ditentukan (a, m) = 1
Jika $\{x1, x2, \ldots, xk\}$ adalah suatu sistem residu modulo m yang lengkap atau tereduksi, maka $\{ax1, ax2, \ldots, axk\}$ juga merupakan suatu sistem residu modulo m yang lengkap atau tereduksi.

Contoh 2.13

1. Himpunan $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah merupakan suatu sistem residu lengkap modulo 6. Jika masing-masing unsur A dikalikan dengan 5, yang mana (5,6) = 1, dan setelah dikalikan dimasukkan sebagai unsur himpunan B, maka dapat ditentukan bahwa B = {0, 5, 10, 15, 20, 25}. Himpunan B merupakan suatu sistem residu yang lengkap modulo 6 sebab setiap unsur B kongruen dengan satu dan hanya satu y ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5}, yaitu:

   $0 \equiv 0 (mod\ 6)$ $\quad$ $10 \equiv 4 (mod\ 6)$ $\quad$ $20 \equiv 2 (mod\ 6)$
   $5 \equiv 5 (mod\ 6)$ $\quad$ $15 \equiv 3 (mod\ 6)$ $\quad$ $25 \equiv 1 (mod\ 6)$

2. Himpunan A = {1, 5, 7, 11} adalah merupakan suatu sistem residu tereduksi modulo 12. Jika masing-masing unsur A dikalikan dengan 17 dengan (17,12) = 1, dan setelah dikalikan dimasukkan sebagai unsur himpunan B, maka dapat ditentukan bahwa B = {17, 85, 119, 187}. Himpunan B merupakan suatu sistem residu tereduksi modulo 12 sebab setiap unsur B relatif prima dengan 12, dan tidak ada sepasang unsur B yang kongruen, yaitu
   $(17,12) = (85,12) = (119,12) = (187,12) = 1$
   $17 \equiv 85(mod\ 12)$ $17 \equiv 119(mod\ 12)$ $17 \equiv 187(mod\ 12)$
   $85 \equiv 119(mod\ 12)$ $85 \equiv 187(mod\ 12)$ $119 \equiv 187(mod\ 12)$

Teorema 2.16 Teorema Euler
Jika a, m ∈ Z dan m > 0 sehingga (a, m) = 1, maka
$a^{\phi(m)} \equiv 1(mod\ m)$
Contoh 2.14
Carilah dua digit terakhir lambang bilangan desimal dari 23^{500}.
Soal ini dapat dijawab dengan menyatakan maknanya dalam bentuk lain, yaitu sama dengan mencari x jika $23^{500} \equiv x(mod\ 100)$. Kemudian bentuk $23^{500} \equiv x(mod\ 100)$ dapat dipecah menjadi $23^{500} \equiv x(mod\ 4)$ dan $23^{500} \equiv x(mod\ 25)$.

1) mencari x dari $23^{500} \equiv x\ (mod\ 4)$.
   $2^3 \equiv 3(mod\ 4)$, maka $23^2 \equiv 9(mod\ 4) \equiv 1(mod\ 4)$,
   sehingga $23^{500} = (23^2)^{250}$
   Dengan demikian $23^{500} = (23^2)^{250} \equiv 1^{250}(mod\ 4)$, atau
   $x \equiv 1(mod\ 4)$
2) mencari x dari $23^{500} \equiv x\ (mod\ 25)$
   $23 \equiv -2(mod\ 25)$, maka $23^2 \equiv 4(mod\ 25)$, $23^4 \equiv 16(mod\ 25)$,
   $23^8 \equiv 6(mod\ 25), 23^{16} \equiv 11(mod\ 25), 23^{32} \equiv -4(mod\ 25)$
   $23^{64} \equiv 16(mod\ 25), 23^{128} \equiv 6(mod\ 25)$, dan
   $23^{256} \equiv 11(mod\ 25)$

Dengan demikian

$23^{500} = 23^{256} \,.23^{128} \,.23^{64} \,.23^{32} \,.23^{16} \,.23^{4}$

$\equiv 11.6.16.(-4).11.16(mod\ 25)$

$\equiv (-4).6.(-4).6(mod\ 25)$

$\equiv 576(mod\ 25)$

$\equiv 1(mod\ 25)$, yaitu $x \equiv 1(mod\ 25)$

Dari hasil 1) dan 2), yaitu $x \equiv 1(mod\ 4)$ dan $x \equiv 1(mod\ 25)$, maka berdasarkan pada Teorema 2.14(b), $x \equiv 1(mod$ [4,25]$)x$ $\equiv 1(mod$ 100)

jadi $23^{500} \equiv 1(mod\ 100)$, berarti dua digit terakhir lambang bilangan desimal dari 23^{500} adalah 01.

Contoh 2.15

Tunjukkan jika (n, 7) = 1, $n \in$ N, maka $7 \mid n^7 - n$

Jawab:

Karena (n, 7) = 1, maka menurut Teorema Euler, $n^{\Phi(7} \equiv 1(mod\ 7)$. Selanjutnya ϕ(7) = 6, sehingga diperoleh $n^{\,6} \equiv 1(mod\ 6), d$an sesuai Definisi 3.1, $7 \mid n^6 - 1$, dan akibatnya $7 \mid n(n^6 - 1)\ atau\ 7 \mid n^7 - 1$

Contoh 2.16

Jika bulan ini adalah bulan Mei, maka 239^{43} bulan lagi adalah bulan

Jawab:

Permasalahan ini dapat diganti dengan mencari x jika $239^{43} \equiv x(mod\ 12)$. Karena (239,12) = 1, maka menurut Teorema Euler, $239^{\phi(12)} \equiv 1(mod\ 12)$.

Selanjutnya ϕ(12) = 4, sehingga diperoleh $239^{4} \equiv 1(mod\ 12)$.

$239^{43} = (239^4)^{10.239^3}$

$\equiv 1.239^3\ (mod\ 12)$

$\equiv (-1)(-1)(-1)(mod\ 12)$

$\equiv 11(mod\ 12)$

Jadi x = 11, dengan demikian 239^{43} bulan lagi adalah bulan April.

Contoh 2.17

Kongruensi linier $ax \equiv b(mod\ \ m)$ dapat diselesaikan dengan menggunakan Teorema Euler sebagai berikut:

$ax \equiv b(mod\ m)$

$a^{\phi(m)-1}.ax \equiv a^{\phi(m)-1}.b(mod\ m)$

$x \equiv a^{\phi(m)-1}\ b(mod\ m)$

Penyelesian

$7x \equiv 3(mod\ 12)$ adalah x

$\equiv 7^{\phi(12)-1}\ .3(mod\ 12)$

$\equiv 7^4 - 1\ .3(mod\ 12)$

$\equiv 7^3\ .3(mod\ 12)$

$\equiv 21(mod\ 12)$

$\equiv 9(mod\ 12)$

Teorema 2.17 Teorema Kecil Fermat

Jika p adalah suatu bilangan prima dan p tidak membagi a, maka $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$

Contoh 2.18

Carilah suatu x jika $2^{250} \equiv x(mod\ 7)$ dan $0 \leq x < 7$

Jawab:

Karena 7 adalah bilangan prima, (2,7) = 1, dan $\phi(7) = 7 - 1 = 6$, maka: $2^{\phi(7)} \equiv 1(mod\ 7)$

$2^6 \equiv 1(mod\ 7)$

$2^{250} = (2^6)^{41}\ .2^4 \equiv 1.2\ 4\ (mod\ 7) \equiv 16(mod\ 7) \equiv 2(mod\ 7)$

Jadi: $x = 2$

Contoh 2.19

Carilah satu digit terakhir lambang bilangan basis 10 dari:

1) 2^{500}
2) 7^{175}

Jawab:

Untuk mencari digit terakhir dari lambang bilangan basis 10, permasalahan dapat dipandang sebagai mencari x jika $y \equiv x(mod\ 10)$. Karena 2.5 = 10 dan (2,5) = 1, maka $y \equiv x(mod\ 10)$ dapat dinyatakan sebagai $y \equiv x(mod\ 2)$ dan $y \equiv x(mod\ 5)$.

1) $2 \equiv 0(mod\ 2)$, maka $2^{500} \equiv 0, 2, 4, 6, 8, \ldots (mod\ 2)$
   $\phi(5) = 4\ dan\ (2,5) = 1$, maka $2^4 \equiv 1(mod\ 5)$, sehingga $2^{500} = (2^4)^{125}\ .1(mod\ 5) \equiv 1, 6, 11, 16, 21, \ldots\ (mod\ 5)$

Dengan demikian $2^{500} \equiv 6(mod\ 2)$dan $2^{500} \equiv 6(mod\ 5)$, berarti $2^{500} \equiv 6(mod\ 10)$. Satu digit terakhir lambang bilangan basis 10 dari 2^{500} adalah 6.

2) $7 \equiv 1(mod\ 2)$, maka $7^{175} \equiv 1, 3, 5, \ldots\ (mod\ 2)$
$\phi(5) = 4\ dan\ (7{,}5) = 1$, maka 7 4 $\equiv 1(mod\ 5)$, sehingga 7^{175}
$= (7^4)^{43}\ .7^3 \equiv 73(mod\ 5) \equiv 2.2.2(mod\ 5) \equiv 8(mod\ 5) \equiv 3(mod\ 5) \equiv 3, 8, 13, 18, \ldots\ (mod\ 5)$.
Dengan demikian $7^{175} \equiv 3(mod\ 2)$ dan $7^{175} \equiv 3(mod\ 5)$, berarti $7^{175} \equiv 3(mod\ 10)$. Satu digit terakhir lambing bilangan basis 10 dari 7175 adalah 3.

Teorema 2.18

Jika (a, m) = 1, maka hubungan $ax \equiv b(mod\ m)$ mempunyai selesaian $x = a^{\phi(m)-1}\ .b + tm$

Teorema 2.19 Teorema Wilson

Jika p adalah suatu bilangan prima, maka $(p- 1)! \equiv -1(mod\ p)$

Contoh 3.20

1) (7– 1)! = 6! = 1.2.3.4.5.6 = 1. (2.4). (3.5). 6 = 1.8.15.6
$\equiv 1.1.1.6(mod\ 7) \equiv - 1(mod\ 7)$
2) (13– 1)! = 12! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12
= 1. (2.7). (3.9). (4.10). (5.8). (6.11). 12 = 1.14.27.40.40.66.12
≡ 1.1.1.1.1.1.12(mod 13) ≡ – 1(mod 13)

Teorema 2.20

Jika n adalah suatu bilangan bulat positif sehingga $(n- 1)! \equiv - 1(mod\ n)$, maka n adalah suatu bilangan prima.

Contoh 3.21

(15– 1)! = 14! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14
= 1.2. (15).4.6.7.8.9.10.11.12.13.14 ≡ $0(mod\ 15)$
(15– 1)! = 14! tidak kongruen dengan – 1(mod 15), maka 15 bukan suatu bilangan prima.

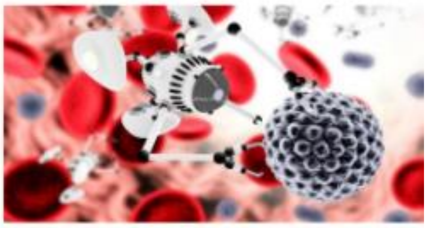
6. Logaritma

- **Fungsi Logaritma**

Logaritma secara dasar merupakan operasi matematika yang merupakan kebalikan dari Eksponen. Artinya, untuk mencari nilai dari suatu bilangan logaritma harus membalikkan fungsi dari eksponensial. Logaritma merupakan salah satu cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan mengenai fungsi yang memiliki pangkat banyak, bahkan bisa dilakukan untuk fungsi yang memiliki pangkat yang tidak diketahui (n). Logaritma dapat memudahkan dalam mencari turunan (integral) dari suatu kasus.

Kegunaan logaritma dalam kehidupan sehari - hari secara langsung memang sulit ditemukan sebagaimana juga eksponen. Namun demikian, manfaat logaritma ini dalam kehidupan secara tidak langsung. Artinya, logaritma terlalu rumit untuk diterapkan dalam kehidupan sehari - hari. Logaritma dipakai oleh para peneliti dan saintis untuk menyederhanakan suatu model matematis dari suatu fenomena yang diamati dalam penelitian. Hasil penemuan dari peneliti dan saintis ini berpengaruh dalam kehidupan kita.

Misalkan penemuan komputer dan smartphone banyak menggunakan konsep logaritma dalam pembuatan program mereka.



Gambar 8. Ilustrasi pertumbuhan Tekhnologi Nano

Sumber : http://www.monsterrarnet.com

Sebelum ditemukannya logaritma, banyak persoalan dalam sains yang sulit untuk dipecahkan, terutama bagi astronom dalam mengukur jarak antar bumi dengan bulan atau jarak antara satu bintang dengan bintang yang lainnya. Penggunaan logaritma telah memudahkan astronom dalam mengalikan dan menghitung jarak antara satu objek dengan objek lain yang mempunyai jarak yang sangat jauh, bahkan hingga memunculkan fungsi logaritma.

Gambar 9. Ilustrasi Perhitungan Astronom

Sumber : http://www.monsterrarnet.com

Demikian juga pada ilmu biologi logaritma banyak digunakan. Contoh dalam menghitung pertumbuhan, suatu tumbuhan membutuhkan waktu yang sangat lama. Adanya pemodelan-pemodelan matematis seperti halnya fungsi logaritma memudahkan para saintis biologi atau kimia melakukan perhitungan dalam persoalan pertumbuhan tumbuhan atau zat. Beberapa kegunaan logaritma dalam kehidupan sehari – hari menunjukkan bahwa logaritma sesungguhnya ke depan akan semakin dekat dengan dengan kehidupan manusia. Hal ini melihat kecenderungan konsep dari logaritma banyak digunakan dalam teknologi-teknologi tingkat tinggi.

- **Fungsi Logaritma dan Grafiknya**

Dari fungsi $f : x \rightarrow a^x$ yang mempunyai domain bilangan real dan range bilangan real positif. Fungsi tersebut bijektif dari R ke R+ sehingga mempunyai invers f^{-1} $: R+ \rightarrow R$ Yaitu setiap x $\in$ R mempunyai peta tunggal y $\in$ R+ dan sebaliknya y $\in$ R+ mempunyai peta tunggal x $\in$ R .

Jadi fungsi $f : x \rightarrow ax$ mempunyai invers f^{-1} sehingga dari $y = a^x$ $\Leftrightarrow$ ${}^{a}\log y = x$ diperoleh : $f^{-1}(x) =$ ${}^{a}\log x$ dan $f^{-1}(y) =$ ${}^{a}\log y$.

Fungsi invers ini disebut fungsi logaritma yang mempunyai domain himpunan bilangan positif R+ dan range himpunan bilangan real R

Berarti fungsi $f^{-1}: x \rightarrow {}^{a}\log x$ adalah fungsi invers dari fungsi $f: x \rightarrow a^{x}$. Fungsi – fungsi tersebut grafiknya simetris terhadap garis y = x sehingga setiap titik (q,p) pada grafik y = ${}^{a}\log x$ merupakan peta titik (p,q) pada grafik $y = a^{x}$ Dalam logaritma x a log diisyaratkan a > 0 d dan a ≠ 1, serta x > 0

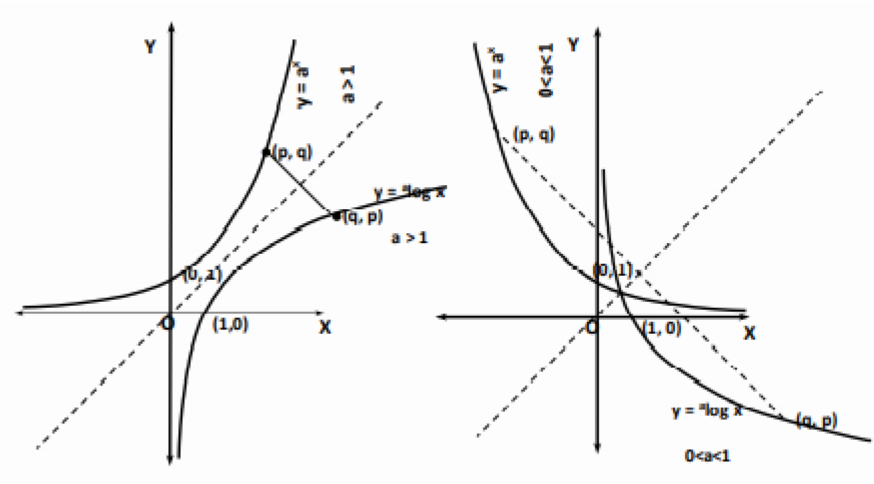
Fungsi logaritma merupakan invers dari fungsi eksponen. Fugsi logaritma dapat dicari nilai fungsinya untuk domain $0 < x < \infty$.

Dengan demikian secara umum bentuk umum fungsi logaritma adalah: $f\ x\ x\ a: \rightarrow {}^{a}\log x$ atau $f(x) = {}^{a}\log x$ dengan $a > 0, a \neq 1, x > 0$ dan $x \in R$ Dari bentuk umum di atas dapat diambil pengertian sebaga berikut:

1. Daerah asal (domain) dari fungsi logaritma adalah $Df: \{x\ x > 0, x \in R\}$.
2. a disebut bilangan pokok (basis) logaritma dengan syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$ dengan demikian berlaku $0 < a < 1$ dan $a > 1$.
3. Daerah hasil (range) dari fungsi logaritma adalah $Rf: \{y - \infty < y < +\infty, y \in R\}$

Grafik fungsi logaritma $f(x) = {}^{a}\log x$ selalu memotong sumbu X di titik (1,0) dan tidak pernah memotong sumbu Y. Apabila $0 < a < 1$ maka grafiknya turun, sedangkan apabila $a > 1$ maka grafiknya naik.

Berdasar kenyataan bahwa fungsi eksponen dan fungsi logaritma yang pokok eksponen dan pokok logaritmanya sama adalah fungsi yang saling invers, maka grafik kedua fungsi tersebut saling simetris terhadap grafik fungsi identitas, yaitu $f(x) = x$ yang persamaannya $y = x$. Karena itu maka setiap titik (q, p) pada grafik y = ${}^{a}\log x$ merupakan peta titik (p, q) pada grafik $y = a^{x}$. Hal ini dapat ditunjukkan seperti pada gambar berikut.



$V1.$

Diketahui $V_1 = 0{,}01$; $V_2 = 0{,}5$ dan log 5 = 0,6989.

Tentukan besarnya kerja motor tersebut!

Jawab:

$\omega = ln\, V_2 - lnV_1 = \ln \frac{V_2}{V_1} = ln\, 50 = 2{,}303\, log\, 50$

$= 2{,}303\, (log\, 5 + log\, 10) = 2{,}303.$

$1{,}6989 = 3{,}9126$

Jadi besarnya kerja motor adalah 3,9126 joule

- **Sifat-sifat logaritma sebagai berikut:**

(1) log (a × b) = ^{g}log a + ^{g}log b

(2) $^g\log \left(\frac{a}{b}\right) = {}^g\log a - {}^g\log b$

(3) $^g\log a^n = n \times {}^g\log a$

(4) $^g\log a = \frac{^p\log a}{^p\log g}$

(5) $^g\log a = \frac{1}{^a\log g}$

(6) $^g\log a \times {}^a\log b = {}^g\log b$

(7) $^{g^n}\log a^m = \frac{m}{n}\, {}^g\log a$

(8) $g^{\,^g\log a} = a$

- **Persamaan dan Pertidaksamaan Logaritma**

Persamaan logaritma adalah suatu persamaan yang memuat variabel dalam pokok logaritma atau dalam numerisnya (anti logaritma).

Ada beberapa bentuk persamaan logaritma diantaranya:

1) Persamaan logaritma berbentuk :
   a) ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$
   b) ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$ dengan f(x) dan g(x) bukan fungsi konstan
2) Persamaan logaritma dalam bentuk persamaan kuadrat Hal ini sering dijumpai bentuk ${}^{a}\log^{n} f(x)$, yang artinya $({}^{a}\log f(x))^{n}$

   Dalam persamaan logaritma perlu disyaratkan bahwa bilangan pokok dan yang dilogaritmakan harus positif dan bilangan pokok tidak sama dengan satu.

   Contoh:

   Tentukan himpunan penyelesaiaan dari : $log\ (x - 2) + log\ (x - 7) = log\ 6$

   Jawab: Syarat $x - 2 > 0$ dan $x - 7 > 0$. Jadi syaratnya $x > 7$

   Maka $\log(x - 2) + \log(x - 7) = \log 6 \Leftrightarrow \log(x^2 - 9x + 14) = log\ 6$

   $\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 6$

   $\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 6$

   $\Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0$

   $\Leftrightarrow (x - 1)(x - 8) = 0$

   $\Leftrightarrow x = 1\ atau\ x = 8$

   Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah { 8 }

Dari fungsi $f : x \to {}^{a}\log f(x)$yang merupakan fungsi naik bila $a > 1$ dan $x \in R^{+}$, sedangkan fungsi turun bila $0 < a < 1$, berlakulah :

a) Untuk $a > 1$ sehingga: ${}^{a}\log x > {}^{a}\log y \Leftrightarrow x > y$

   ${}^{a}\log x < {}^{a}\log y \Leftrightarrow x < y$

b) Untuk $0 < a < 1$ sehingga: ${}^{a}\log x > {}^{a}\log y \Leftrightarrow x < y$

   ${}^{a}\log x < {}^{a}\log y \Leftrightarrow x > y$

   Contoh :

   Tentukan himpunan penyelesaian dari :

   ${}^{7}\log(x - 1) > 3 - 2 \ . \ {}^{x+1}\log 7$

Jawab : Misalkan $^{7}\log(x-1)=p$ maka $^{x\text{-}1}\log 7 = \frac{1}{p}$

Pertidaksamaan menjadi :

$p > 3 - 2.\frac{1}{p} \Leftrightarrow p^2 - 3p + 2 > 0$

$\Leftrightarrow (p-1)(p-2) > 0$

$\Leftrightarrow p < 1$ atau $p > 2$ untuk $p < 1$ maka $x - 1 < 7 \Leftrightarrow x < 8$

karena syaratnya $x - 1 > 0$

sehingga $x > 1$ dan $x < 8$ diperoleh $1 < x < 8$ untuk $p > 2$ maka

$x - 1 > 49 \Leftrightarrow x > 50$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{ x\ 1 < x < 8\ atau\ x > 50 \}$

D. Rangkuman

1. Bilangan bulat positif d disebut FPB dari a dan b jika dan hanya jika:
   (i). $d|a$ dan $d|b$
   (ii). jika $c|a$ dan $c|b$ maka $c \leq d$.
   Faktor persekutuan terbesar dari a dan b dinotasikan dengan $FPB(a,\ b)$. Beberapa hal yang perlu diketahui tentang FPB antara lain:
   (i). FPB (0,0) tidak didefinisikan.
   (ii). $FPB\ (a,\ b)$ selalu bilangan bulat positif, sehingga $FPB\ (a,\ b) \geq 1$.
   (iii). $FPB\ (a,\ b) = FPB\ (a,\ -b) = FPB\ (-a,\ b) = FPB\ (-a,\ -b)$.
2. Jika $a_{1,}.a_{2,} \ldots a_n$ bilangan-bilangan bulat dengan $ai \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n,$ maka kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari bilangan-bilangan tersebut adalah bilangan bulat positif terkecil di antara kelipatan-kelipatan persekutuan dari $a_{i,}.a_{2,} \ldots a_n$
   KPK dari $a1, a2, \ldots, an$ dituliskan sebagai $KPK\ [a1, a2, \ldots, an]$.
3. Rumus umum suku ke –n adalah: $u_n = a + (n-1)\ b$, sedangakan rumus umum deret aritmatika adalah $\mathrm{Sn} = \frac{1}{2}\ \mathrm{n}(\mathrm{a} + \mathrm{un}) = \frac{1}{2}\ \mathrm{n}[(2\mathrm{a} + (\mathrm{n}-1)\mathrm{b}]$
4. Rumus umum suku ke-n barisan geometri adalah $u_n = ar^{n-1}$, sedangkan rumus umum deret geometri adalah $Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$ untuk $r < 1$ atau $Sn = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$,untuk $r > 1$.

5. Sifat-sifat logaritma sebagai berikut:
   (1) ${}^{g}\log (a \times b) = {}^{g}\log a + {}^{g}\log b$
   (2) ${}^{g}\log \left(\frac{a}{b}\right) = {}^{g}\log a - {}^{g}\log b$
   (3) ${}^{g}\log a^{n} = n \times {}^{g}\log a$
   (4) ${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$
   (5) ${}^{g}\log a = \dfrac{1}{{}^{a}\log g}$
   (6) ${}^{g}\log a \times {}^{a}\log b = {}^{g}\log b$
   (7) ${}^{g^{n}}\log a^{m} = \frac{m}{n}\, {}^{g}\log a$
   (8) $g^{{}^{g}\log a} = a$